CORREGIDO

NOVEDADES SORPRENDENTES
DE LAS MATEMÁTICAS

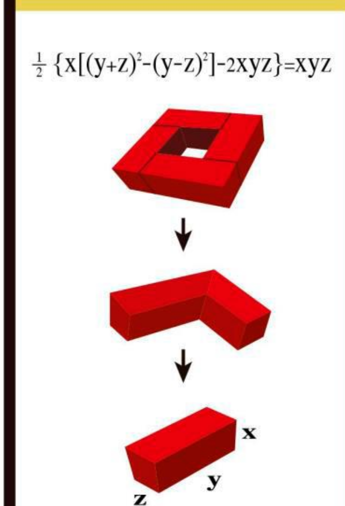
DI MAT vis

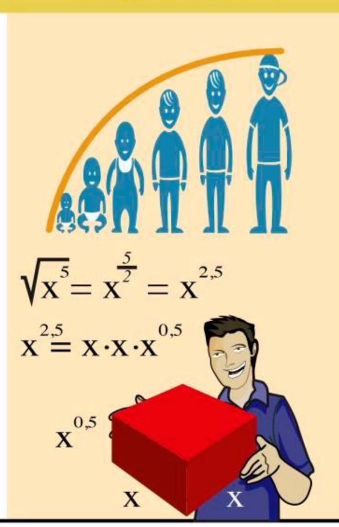
Didáctica de la Matemática Visual

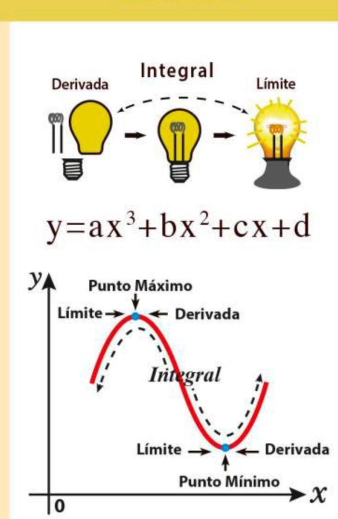
Práctico, Demostrativo y Tangible

Extracto de los libros del mismo autor

Álgebra	Logaritmo	Cálculo	Trigonometría







Autor: Ing. Mohammad Hajari M.

SP Ediciones SABER ES PODER

INDICE

BIOGRAFÌA DEL ING. MOHAMMAD HAJARI M.

- **Generales**

El Ing. Mohammad Hajari M. nació en Irán el 13 de octubre
Del 1940, es casado y tiene dos hijos.

- **Formación académica**

Es Ing. Electrónico (Universidad Industrial Politécnica de Teherán – Irán 1960 - 1964), Diplomado en Gerencia Universitaria y Alta Gerencia (1998) en U.A.G.R.M.

- **Experiencias laborales en su país de origen y países Europeos:**

Entre los años 1966 – 1998 Trabajó en el Ministerio de Economía – Instituto de investigación y estandarización de los artefactos eléctricos. Participó en las asambleas generales de IEC (International Electrical Commition) en Londres- Inglaterra, Praga- Checoslovaquia, Teherán- Irán.
Trabajó en la fábrica de montaje de radio TV y artefactos electrodomésticos en Hamadan- Irán (1969-1975).

- **Experiencia laboral – docencia**

Director del Instituto de Electrónica Irán (1978-1987), Director del Colegio Técnico Universal (1984-1987), Director General del Instituto Técnico universal (1988-1994), Rector de la Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz (UTEPSA) (1994-2002), Creador del Método DIMAT (2002- 2006), creador del método DIMATVIS (2006- Hasta la fecha) en Santa Cruz de la Sierra- Bolivia.

- **Congresos y encuentros nacionales en calidad de expositor.**

Certificados de agradecimientos en diferentes Unidades educativas de toda Bolivia por la implementación del método DIMAT.
Expositor en el “Primer congreso internacional de propuestas educativas innovadoras” Pedagogía 2006 en Sucre – Bolivia (2006).
Expositor en la conferencia “Enseñanza Matemática” dictada en la Universidad Pedagógica Nacional “Mariscal Sucre”. Sucre – Bolivia (2007).
Expositor en la conferencia “Enseñanza Matemática” dictada en el Instituto Normal Superior “Eduardo Avaroa” en Potosí – Bolivia (2007).
Expositor en el “Congreso Internacional de Educación Inicial y Primaria” II jornadas nacionales de recreación escolar en Santa Cruz – Bolivia (2008).
Conferencista en el “II Congreso Internacional Sobre la Enseñanza de la Matemática” en Cochabamba – Bolivia (2008).
Expositor en el congreso “Innovaciones pedagógicas para el aprendizaje de la matemática” en La Paz – Bolivia (2009)
Expositor en la conferencia “Enseñanza de la Matemática mediante el método DIMATVIS” en Trinidad – Bolivia (2009).

- **Congresos y encuentros internacionales en calidad de expositor**

Taller “Matemáticas Lúcidas, Desarrollo de la Inteligencia Matemática” Panamá (2005),
Expositor en el taller “Nuevo Paradigma en la Enseñanza de las Matemáticas” en la decimonovena reunión Latinoamericana de Matemáticas educativa Montevideo – Uruguay (2005)
Exposición del método DIMATVIS en Manaos – Brasil (2006)
Expositor y nombramiento de miembro formal del honorable cuerpo académico del **“**Congreso de Educación Internacional**”** *Educación: Estrategia frente al cambio* en San Juan – Argentina (2014)
Expositor del método DIMATVIS en el congreso “The Lidership Institute” Washington dc.

NUEVO MODELO DE LA MATEMÁTICA

Las estadísticas muestran que cada vez hay menos tendencia de los estudiantes a las ciencias exactas y buscan carreras que no tengan matemáticas en las universidades y al egresar no encuentran un trabajo adecuado porque tienen la concepción de las matemáticas como: Teóricas, Mecánicas, Abstractas y Agotadoras.

Por lo tanto se propone un cambio, presentando un nuevo paradigma, como el nuevo método DIMATVIS , creado por el Ing. Electrónico Mohammad Hajari M. con más de 10 años de experiencia en su país en las fábricas de montaje de radio, televisión y artefactos electrodomésticos ,con más de 30 años de experiencia en Bolivia en la educación técnica con la fundación de colegios e Institutos técnicos y apoyo a la creación de la actual Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz UTEPSA y desde hace 14 años que se está dedicando al desarrollo del método matemático DIMATVIS el cual es:

- Práctico, Demostrativo
- Lógico, razonable
- Concreto, pues usted puede ver y tocar con sus manos para creer y crear (Un laboratorio DIMATVIS)
- Es divertido y utiliza materiales didácticos.

Este método ha creado gusto e interés en los estudiantes para aprender la matemática.

DURANTE EL DESARROLLO DEL MÉTODO PARA VISUALIZAR DE MANERA PRÁCTICA LAS MATEMÁTICAS, SE ENCONTRARON NUEVOS CONCEPTOS, DEFINICIONES, GRÁFICAS EN:

- **Aritmética geometría y álgebra**
- **Logaritmos**
- **Trigonometría**
- **Derivadas, integrales y límites**

NOVEDADES SORPRENDENTES EN LA MATEMATICA

A continuación aclaramos las definiciones y operaciones de aritmética y geometría, luego su combinación en el álgebra:

a) ARITMÉTICA:

DEFINICIONES Y REGLAS:
La Aritmética es la ciencia de las ***cantidades numéricas,*** independientes entre sí, enteros (pequeñas o grandes) y fracciones (grandes o pequeñas) tanto positivas como negativas, y se expresa por un ***coeficiente***. Por ejemplo:

…-9,-8,-7,-6,-5,-5,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9…

$$\ldots\ldots -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \ldots\ldots\ldots$$

Fórmulas y formas de las cantidades ARITMÉTICAS:
Si consideramos: $x = *$ o cualquier objeto.

Fórmula Aritmética	0***X***	1***X***	2***X***	3***X***	4***X***
Forma		$*$	$**$	$***$	$****$

$$(\boldsymbol{reprenta\ un\ vacio\ o\ ausencia})$$

Por lo tanto consideremos como:

OPERACIONES ARITMÉTICAS:

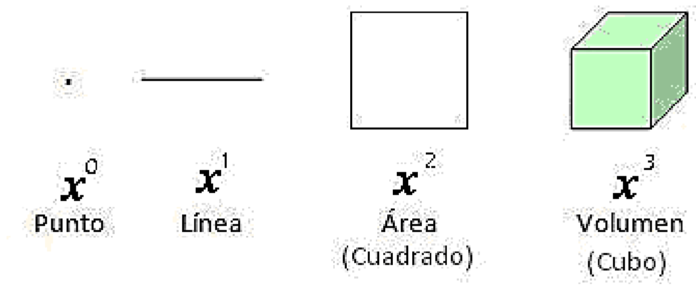
Sumar y restar o aumentar y disminuir las cantidades o valores, son propiedades de las **operaciones aritméticas** que ***operan sobre el coeficiente***, en caso de que exista un factor común, la multiplicación o división pueden facilitar o simplificar las operaciones.

b) GEOMETRÍA

DEFINICIÓN:

La geometría es la ciencia de la cantidad de dimensiones, que pueden ser enteras o fraccionarias, positivas o negativas, las cuales forman figuras o cuerpos geométricos y se expresan por el exponente. Las **formas** están dentro de las mismas **dimensiones.**

La geometría comienza desde punto, y sigue con la línea, área y volumen:



El exponente muestra la cantidad de dimensiones.

En geometría, x puede tener cualquier longitud y se considera a las figuras geométricas como dependientes, es decir: la línea depende del punto, el área depende de la línea y el volumen depende del área.

OPERACIONES GEOMÉTRICAS:

> ***La multiplicación y división son propiedades de las operaciones geométricas y operan sobre los exponentes aumentando o quitando dimensiones.***

CERO GEOMÉTRICO: Es un punto muy fino que no tiene **dimensiones considerables**, y al ser multiplicado por una longitud o distancia se forma una línea para luego formar más dimensiones y figuras geométricas.

FÓRMULA DEL CERO GEOMÉTRICO:

Si consideramos que x^1 es una línea, su eliminación será mediante una operación geométrica, **la división,** o aplicando propiedades de potencias:

$$\frac{x^1}{x^1} = x^{1-1} = x^0 = 1x^0$$

Esta respuesta viene a mostrar el origen de la línea, que es la fórmula del ***punto geométrico.***

Donde x^0 aritméticamente es "**Uno**" por su coeficiente uno, al mismo tiempo geométricamente es un "**punto**" por el exponente cero y algebraicamente se considera como "**un punto** · "

Geometría como exponente

$$\mathbf{1}x^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}\cdot = \cdot \quad \textbf{(Punto)}$$

Aritmética como coeficiente o cantidad

Algebráicamente un Punto

REGLA:
El exponente 0 quiere decir que x no tiene una dimensión considerable y representa el punto geométrico.

Ejemplos:

Algebraicamente:	Visualmente es:	
$\frac{5x^1}{5x^1} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$	.	(Un Punto)
$\frac{3x^1}{x^1} = 3x^{1-1} = 3x^0 = 3$	. . .	(Tres puntos)
$\frac{5x^2}{x^2} = 5x^{2-2} = 5x^0 = 5$	. . . . .	(Cinco puntos)

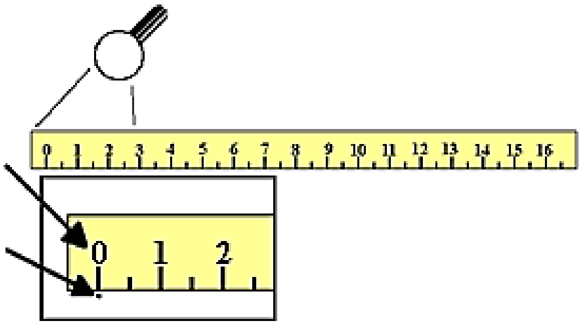
Por lo tanto podemos concluir que:

Los **números aritméticos** son los ***coeficientes*** de una expresión x^0, que al mismo tiempo indican la **cantidad** de puntos geométricos, lo que facilita su visualización algebraica.

DOS CLASES DE CEROS:
DEMOSTRACIÓN PRÁCTICO VISUAL EN UNA REGLA:

Cero Aritmético

El cero Geométrico
El punto



En la regla el cero aritmético indica el inicio de las cantidades numéricas y su equivalente está en el punto o cero geométrico que marca el inicio de la línea.

c) DEFINICIÓN DE ÁLGEBRA:

Álgebra es generalizar a las matemáticas mediante una **combinación o asociación** entre **ARITMÉTICA y GEOMETRÍA** en una base común, que relaciona la longitud con la geometría y la cantidad con la aritmética, y su aplicación depende del rubro o área en que se emplee.

Un término algebraico por lo tanto se plantea de la siguiente forma:

Aritmética
Cantidad
Coeficiente

$$ax^b$$

Geometría
Dimensión
y forma
Exponente

Base común
Longitud
o cantidad

Referencia y detalle

$\boldsymbol{a}$: Variable de cantidad aritmética que puede tomar cualquier valor, sea número entero o fracción, positivo o negativo (diferente del cero).

$\boldsymbol{b}$: Variable geométrica que define la cantidad de dimensiones y puede tomar cualquier valor numérico ya sea entero o fracción, positivo, negativo o cero.

$\boldsymbol{x}$: Es la base común, puede ser una longitud si se refiere a una operación geométrica o una cantidad si se refiere a una operación aritmética, es el intermediario entre Aritmética y Geometría.

Podremos apreciar la generalización de este esquema de álgebra con los siguientes ejemplos:

Se puede expresar un valor fraccionario (muy pequeño) de una millonésima parte de un milímetro $\boldsymbol{a} = \frac{1}{1.000.000}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ milímetro y $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$ resultando una pequeña línea de longitud igual a:

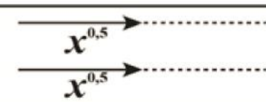
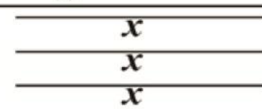
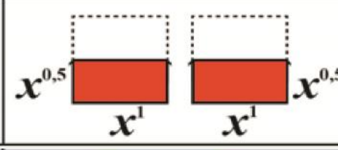
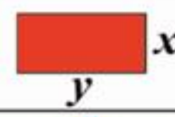
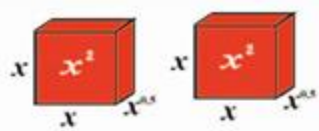
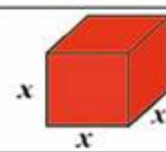
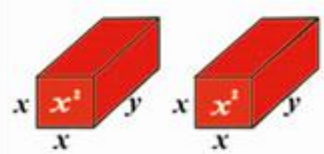
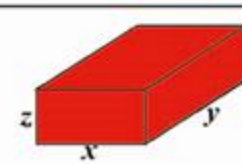
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.000.000}}\,\boldsymbol{mm}$$

Como también es posible expresar un valor entero (muy grande), de 1 millón de Kilómetros cuadrados $\boldsymbol{a} = \mathbf{1.000.000}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$Kilómetro y $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$ **resultando un área grande** de:

$$1.000.000Km^2$$

De esta manera vemos la generalización de las matemáticas mediante el álgebra, combinando cantidades aritméticas y dimensiones geométricas.

TABLA RESUMEN DE VISUALIZACIÓN DE ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

N°	FORMULA	DEFINICION	FORMA
1	$5x^0$	Son 5 puntos Geométricos	• • • • • x^0 x^0 x^0 x^0 x^0
2	$2x^{0,5}$	Son 2 segmentos de Línea (Semilínea)	
3	$3x^1$	Son 3 Líneas	
4	$2x^{1,5}$	Son 2 Rectángulos	
5	xy	Es un Rectángulo	
6	$2x^2$	Son 2 Cuadrados	
7	$2\sqrt{x^5} = 2x^{2,5}$	Son 2 prismas* con base cuadrada	
8	$1x^3$	Es un cubo	
9	$2x^2y$	Son 2 prismas rectangulares con base cuadrada	
10	xyz	Es un prisma de base rectangular	

*** NOTA: Prisma o paralelepípedo**

¿QUÉ DIFERENCIA EXISTE ENTRE LA SUMA Y LA MULTIPLICACIÓN?

La multiplicación lleva el nombre de "producto", pero ¿por qué producto?
La multiplicación en geometría **"produce" una nueva dimensión**, es decir una **LÍNEA, ÁREA y VOLUMEN**.

En geometría la multiplicación de una línea completa por otra línea o trazo es perpendicular, formando un cuadrado o un rectángulo. Un área cuadrada (completa) multiplicada por una línea o por un trazo se prolonga perpendicularmente formando un cubo o un prisma, no precisan ser términos semejantes.

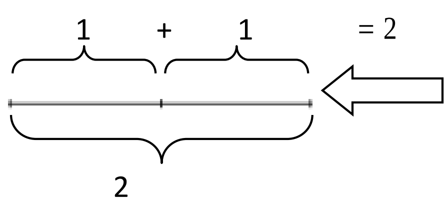
En cambio, la suma no produce una nueva dimensión, se mantiene en su misma unidad de medida, no aumenta dimensiones, se realiza con términos semejantes, es decir, al sumar una línea a otra, ésta se prolongará linealmente y si se suman áreas el resultado será otra área, y así en cualquier dimensión.

EJEMPLOS PRÁCTICOS DEMOSTRATIVOS

¿Existe alguna diferencia entre 1+1 y 1x1?

Regla aritmética: Aritmética es sumar o restar cantidades numéricas, <u>que no cambian su unidad de dimensión y forma (DEBIDO A QUE NO TIENEN PRODUCTO)</u> y su resultado solo es aumentar o disminuir su cantidad, teniendo en cuenta que solo se pueden sumar o restar cuando estos tengan características semejantes, en conclusión: **La suma de dos longitudes es lineal.**

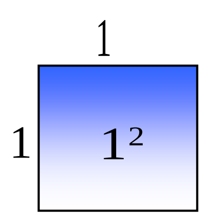
- $1+1=2$



"Se han sumado en línea y siguen en

Regla geométrica: Multiplicar y dividir son operaciones Geométricas ya que aumentan o quitan su dimensión y forma.

- $1\times1=1^2$



Si se trata de una cantidad numérica el resultado será un número, si se trata de longitudes el producto será aumentar su dimensión.
En una base común

OPERACIÓN ARITMÉTICA:
Si se trata de una cantidad numérica la respuesta de los tres son iguales, en resumen aritméticamente son iguales.

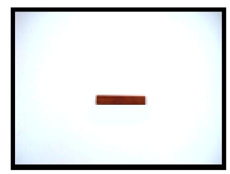
OPERACIÓN GEOMÉTRICA:
Si se trata de una unidad de longitud por ejemplo 1cm, 1m, 1km existe la siguiente diferencia:

Si: $a = 1 \;\therefore$

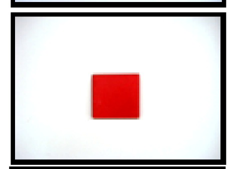
$$a = a^1$$
$$a \cdot a = a^2$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

Es decir:

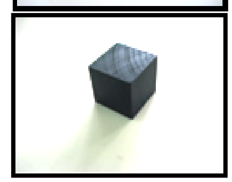
- $1 = 1 \Rightarrow$ Es una línea



- $1 \times 1 = 1^2 \Rightarrow$ Es un cuadrado



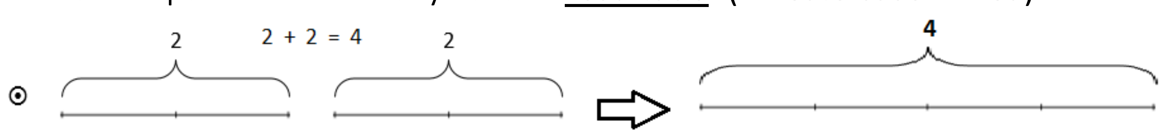
- $1 \times 1 \times 1 = 1^3 \Rightarrow$ Es un cubo



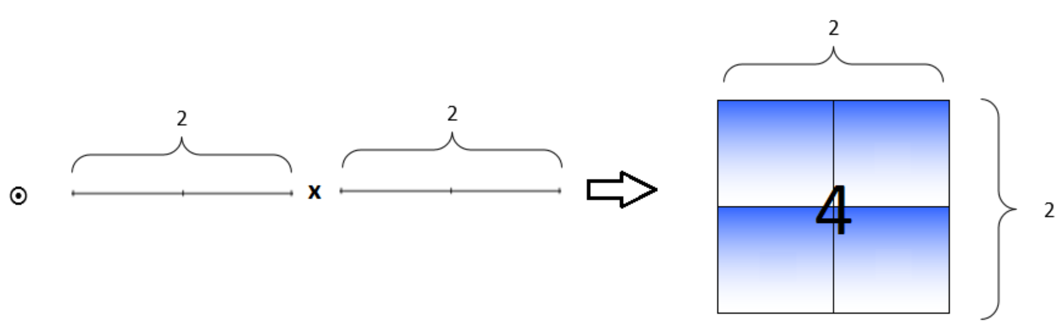
Su expresión aritmética es "1" como cantidad, mientras que su expresión geométrica es línea, área, volumen, y algebraicamente, es una línea, un cuadrado y un cubo respectivamente.

¿Existe alguna diferencia entre 2+2 y 2x2?

2 + 2 = 4 es una operación aritmética y tiene un <u>resultado</u>: (En este caso: Línea)



2 x 2 = 4 es una operación geométrica y tiene un producto (En este caso: Área)



Referencia: Tabla de multiplicación: Está compuesta por cuadrados y rectángulos, donde los lados avanzan en forma lineal aritméticamente y su producto es un área: si ambos lados son iguales forman un cuadrado, en caso de ser diferentes forman un rectángulo, como se observa en la siguiente imagen

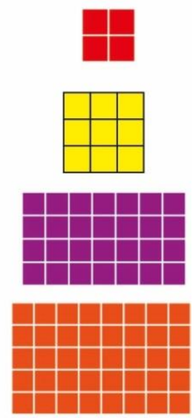
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2x2=4

3x3=9

4x7=28

5x8=40

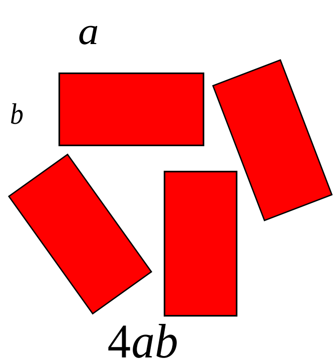


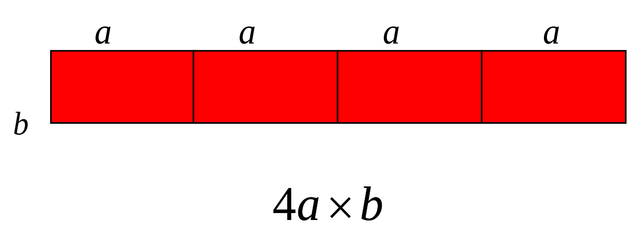
En esta tabla podemos observar que cada número es producto de una multiplicación; se ubican dentro de un cuadrado o un rectángulo en diferentes posiciones.

> Es importante recordar que el resultado de la multiplicación es un nuevo **producto.**

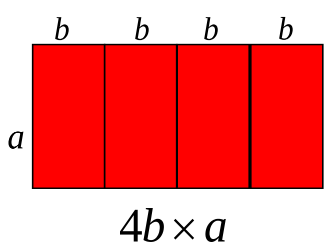
4. DEMOSTRACIÓN DE QUE EL ORDEN DE LOS FACTORES NO AFECTA ARITMTICAMENTE EL RESULTADO, SÍ AFECTA GEOMÉTRICAMENTE AL PRODUCTO.

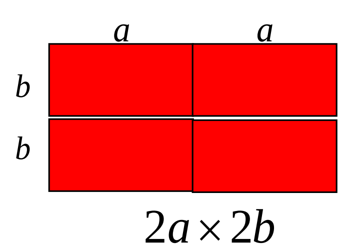
Diferencia entre: 4ab





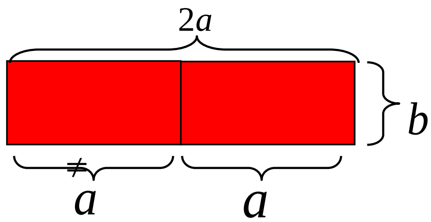
Aritméticamente

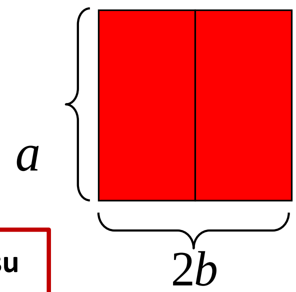




Veamos otro ejemplo visual. “$2\boldsymbol{a}$” por “$\boldsymbol{b}$” es geométricamente diferente de “$\boldsymbol{2b}$” por “$\boldsymbol{a}$”

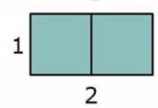
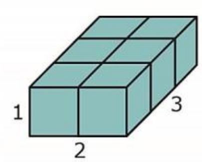
$\boldsymbol{2a \times b}$ $\boldsymbol{2b \times a}$



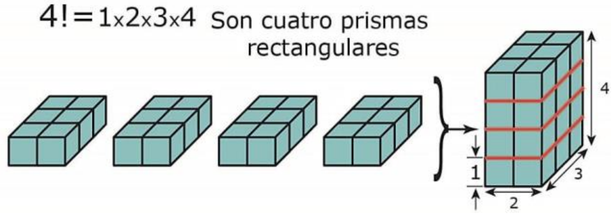


Es una expresión algebraica que aritméticamente su resultados son iguales porque tienen las mismas áreas. Pero geométricamente su producto es diferentes.

Demostración práctico visual del factorial

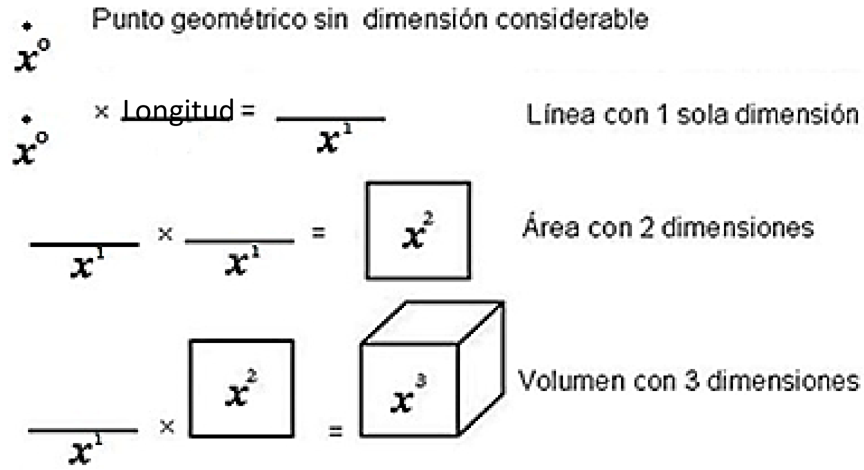
Factorial	Valor	Nombre	Visualización
0!	1	Un Punto	· 1
1!	1	Una Línea	1
2!	1x2	Un Área	 1, 2
3!	1x2x3	Un Prisma rectángular	 1, 2, 3

4!=1x2x3x4 Son cuatro prismas rectangulares



EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON COEFICIENTE SIMPLE:

En aritmética los números van del cero al nueve formando la primera categoría numérica, en geometría su forma y dimensión van de x^0a x^3, donde el coeficiente es igual a ¨uno¨, el cual no influye en las operaciones geométricas (multiplicación y división), por esta razón se las consideran como ***expresiones algebraicas con coeficiente simple*.** Es decir:



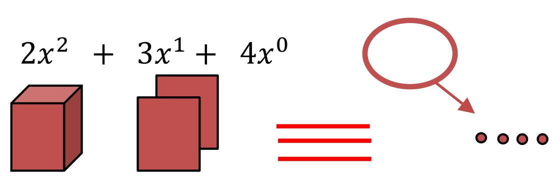
VISUALIZACION DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE

Si consideramos el grado de las siguientes expresiones algebraicas de acuerdo a su exponente:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ tercer\ grado}}{ax^3} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ segungo\ grado}}{bx^2} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ primer\ grado}}{cx^1} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ cero\ grados}}{dx^0}$$

Sabiendo que los coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ son cantidades numéricas, entonces al término independiente $\boldsymbol{d}$ se considera **el coeficiente de una expresión algebraica con exponente ¨grado cero¨**, representando geométricamente la cantidad de puntos.

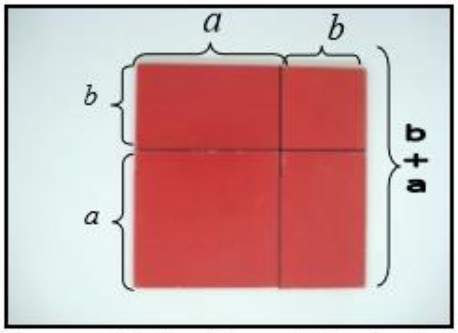
Por ejemplo: $x^3 + 2x^2 + 3x^1 + 4x^0$



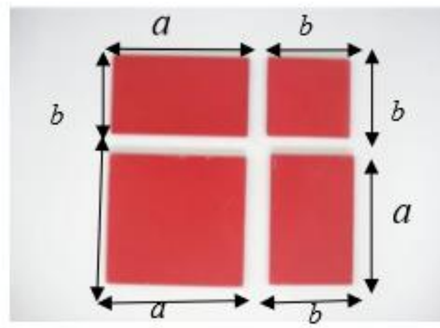
Este ejemplo representa un cubo, dos cuadrados, tres líneas y ***cuatro puntos.***

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

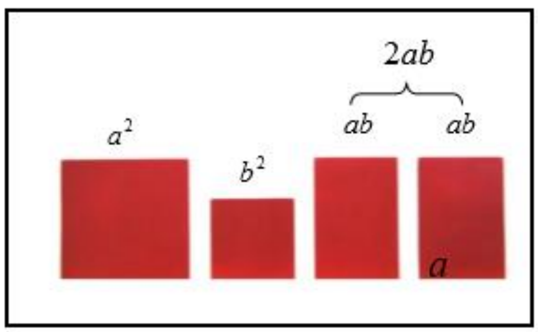
DEMOSTRACIÓN PRÁCTICO VISUAL:
Si separamos cada una de las piezas, podemos ver, que es exactamente lo mismo que tiene la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$



La imagen muestra la figura de la suma de binomios a + b



La imagen muestra las figuras a + b separadas



El resultado de la suma de binomios expresados en figuras

Ahora veamos algunos ejemplos con las expresiones algebraicas utilizando el ***lenguaje visual***, en este caso podemos considerar el color **rojo** las expresiones algebraicas positivas y color **amarillo** las negativas

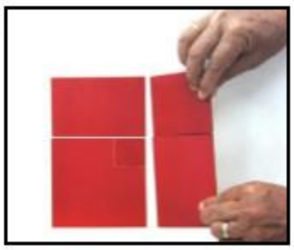
DIFERENCIA DE BINOMIOS AL CUADRADO

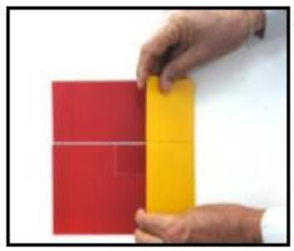
La diferencia de un binomio al cuadrado, es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo"

$$\boxed{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$$

DEMOSTRACIÓN PRÁCTICO VISUAL

Para la demostración de $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$ primero se debe armar $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ y luego lo convertimos de la siguiente manera: Cuando b se convierte en negativo, se multiplica la franja vertical de $\boldsymbol{b}$ que tiene $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ haciéndose negativo (amarillo), es decir:

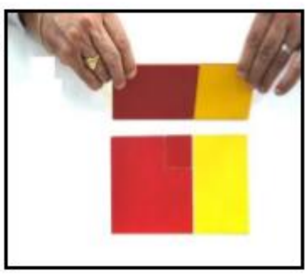
1) 

2) 

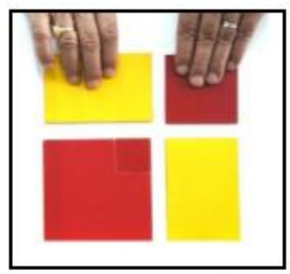
3) 

Las imágenes muestran cómo se cambian las figuras de la franja vertical de b

Luego se hace lo mismo con la franja horizontal y cambia en la esquina donde se encuentra $\boldsymbol{b}^2$ tocando y dando vuelta 2 veces la pieza por los cambios en las 2 franjas, como se observa:

4) 

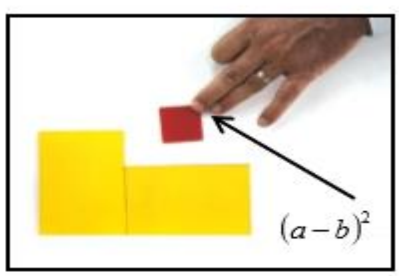
5) 

6) 

Las imágenes muestran cómo se cambian las figuras de la franja horizontal de b quedando la pieza de b^2 positiva, demostrando la ley de signos $(-\times-=+)$

Esto demuestra por que la multiplicación de negativo por negativo da como resultado positivo.

Quedando como resultado:



Muestra el tamaño real de $(a-b)^2$

El cuadrado obtenido representa el tamaño real de $(a-b)^2$

CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES $(a-b)^3$

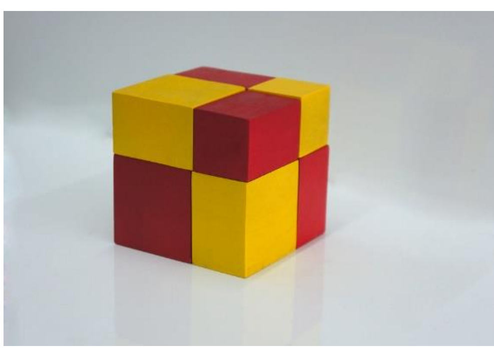
Demostración práctica visual que:

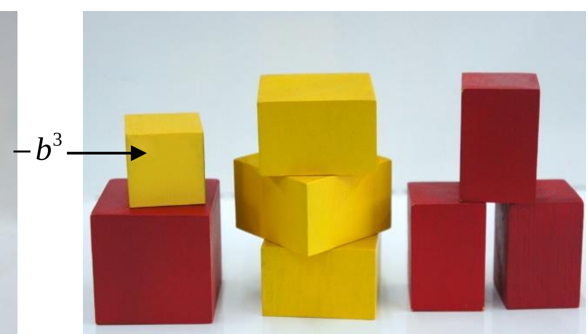
"el cubo de la diferencia indicada de dos números es igual al cubo del primero, menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo".

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(4-2)^3 = 4^3 - 3\times 4^2 \times 2 + 3\times 4\times 2^2 - 2^3$$
$$(2)^3 = 64 - 96 + 48 - 8$$
$$8 = 8$$

Considerando que la fórmula que existe un ($+a$) sumando con un ($-b$) y todo al cubo, es decir:

Para representar se debe cambiar de color, cuando se tiene un valor positivo no afecta al color, solo para cualquier medida que dé como resultado un valor negativo afecta el color, ejemplo $-b^3$.





- Para calcular el volumen del cubo de lado $(a-b)$ se tendrá:

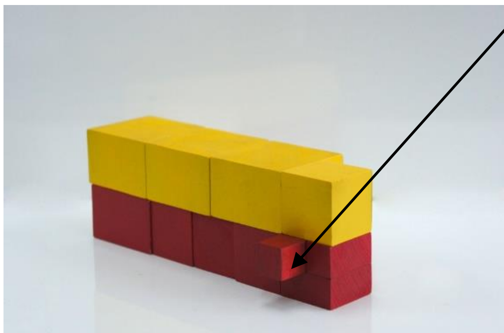
$$V = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^3$$

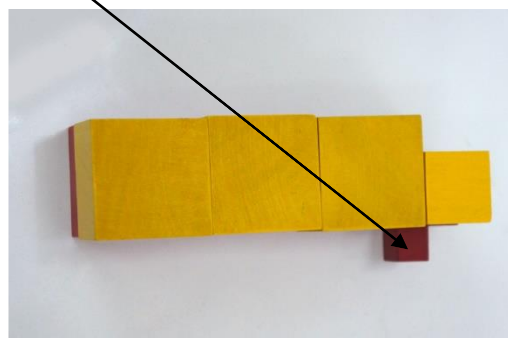
- Sin embargo, para formar el cubo de lado $(a-b)$se necesitan 8 volúmenes menores que son 3 prisas (a^2b), 3 prismas (b^2a), un cubo menor (b^3) y un cubo mayor (a^3).

- Por lo tanto se puede decir que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Ahora si queremos visualizar mejor $(a-b)^3$ simplificando los términos positivos y los negativos tendríamos:





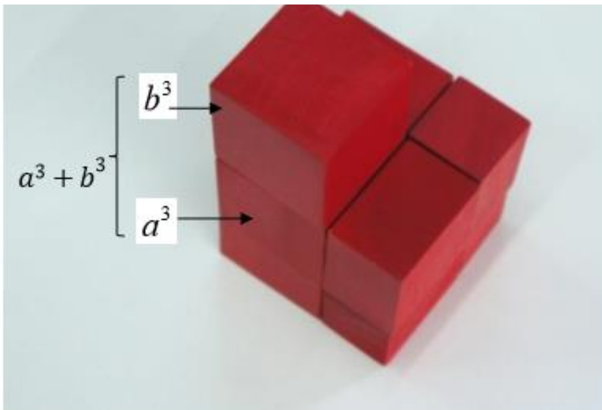
“Para poder verificar la identidad de esta expresión $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ matemáticamente se deben dar valores numéricos, pero con este método permite que los alumnos puedan ver el tamaño real de $(a-b)^3$

Factorización:

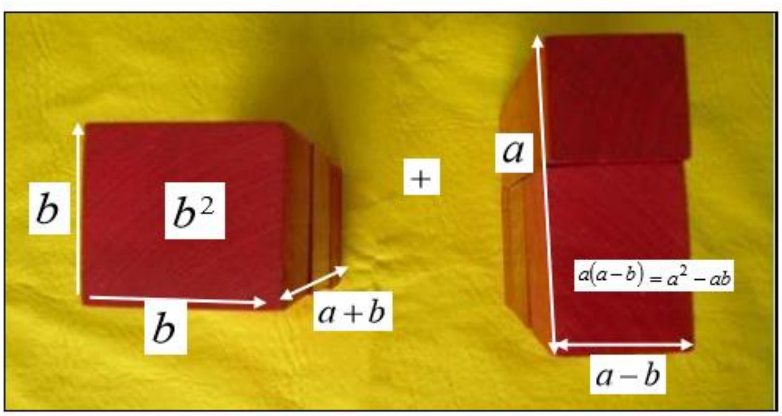
Factorización es convertir las expresiones aritméticas de suma y resta a las expresiones geométricas de multiplicación, bajo un factor común.

DEMOSTRACIÓN PRÁCTICO VISUAL

$$(a^3+b^3) \quad = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$



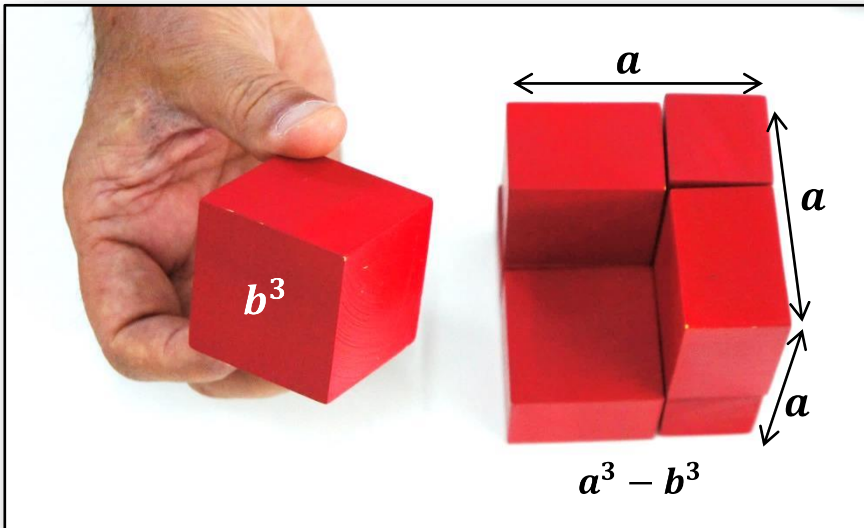
La imagen muestra la suma de dos términos elevados al cubo.



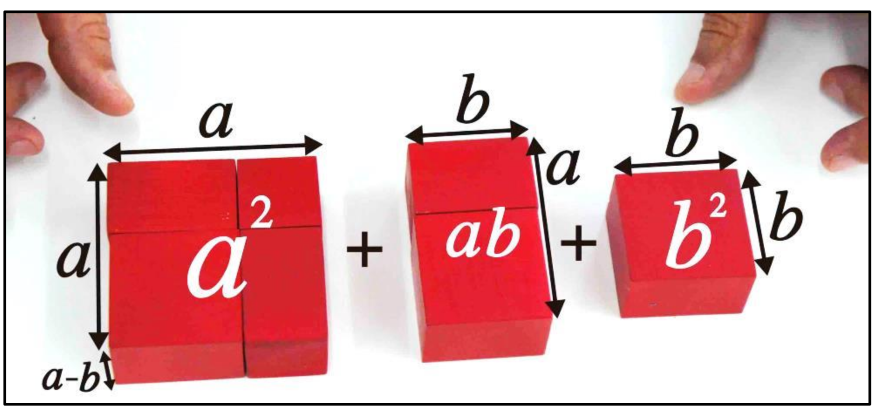
Al unir todas las figuras se observa que: $(a^3+b^3) \quad = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Demostración práctico visual de esta fórmula:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



Para visualizar la división entre $(a - b)$, se ubica las figuras a una **misma altura,** y el **área** de la base representa el cociente de la división, al quitar la altura resulta el área de la base, como se puede observar:

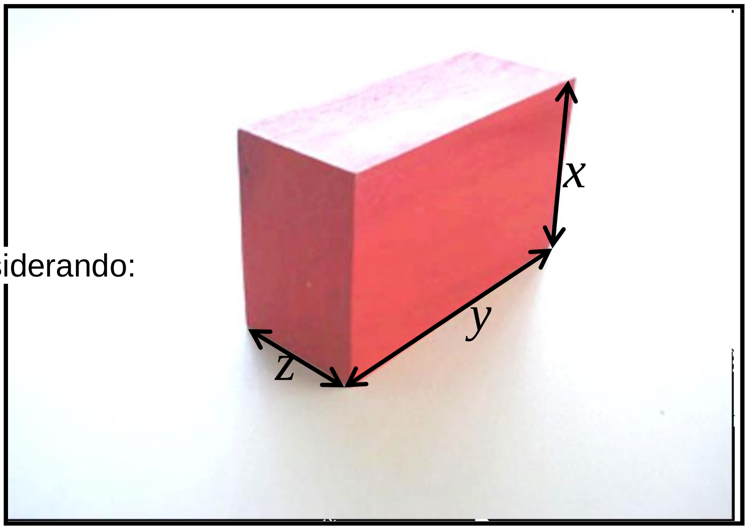


Al unir todas las figuras se observa que: $a^3 - b^3 \quad = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Demostrar práctico visual de la formula algebraica combinada:

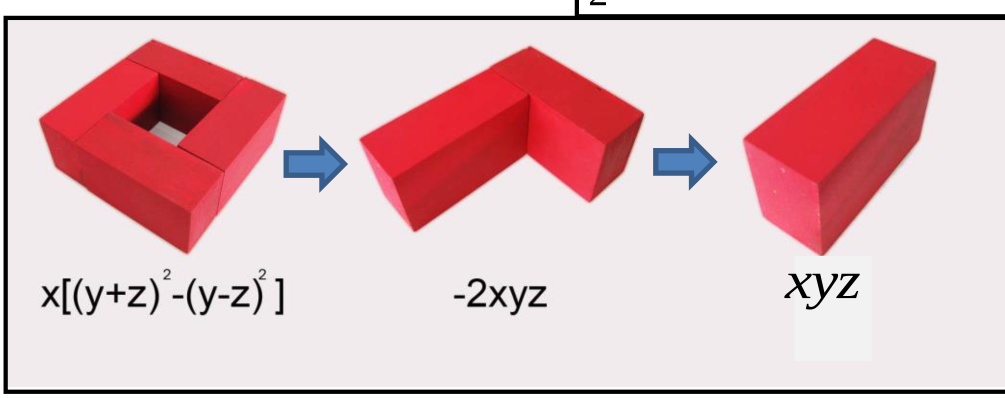
$$\boxed{\frac{1}{2}\left\{x\left[(y+z)^2-(y-z)^2\right]-2xyz\right\}=xyz}$$

Considerando:



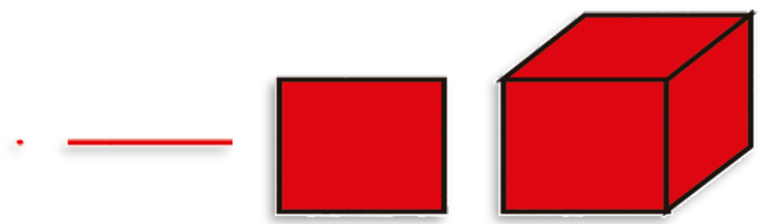
La imagen muestra una figura a utilizar en el ejemplo, con los lados identificados

- La figura corresponde a un prisma con base rectangular, donde x, y, z sus dimensiones y su fórmula. $x \cdot y \cdot z$.
- Considerando el factor común es la dimensión (x), es decir la altura.
- La fórmula de volumen de esta figura es área de la base $(y+z)^2-(y-z)^2$ por su altura común (x). y el “***vacío representa el signo negativo”*** $(-)$
- $-2xyz$ representa 2 prismas al quitar de la figura que hemos armado inicialmente, entonces nos queda $2xyz$.
- Finalmente al multiplicar por $\frac{1}{2}$, resulta: $\boxed{\frac{1}{2}\left\{x\left[(y+z)^2-(y-z)^2\right]-2xyz\right\}=xyz}$



EXPRESIÓN ALGEBRAICA CON COEFIENCIENTE COMPUESTO:

Una expresión ***algebraica simple***, significa cantidades de figuras geométricas, donde solo se mencionan la **cantidad y la dimensión** de la misma, por ejemplo:



$\mathbf{1}\boldsymbol{x^o} = \mathbf{1}\boldsymbol{punto} \quad \mathbf{1}\boldsymbol{x^1} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{linea} \quad \mathbf{1}\boldsymbol{x^2} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{cuadrado} \quad \mathbf{1}\boldsymbol{x^3} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{cubo}$ **…etc.**

Debido a que solo se conoce hasta el exponente 3 cuya forma es un cubo, es decir (x^3), surge la interrogante…

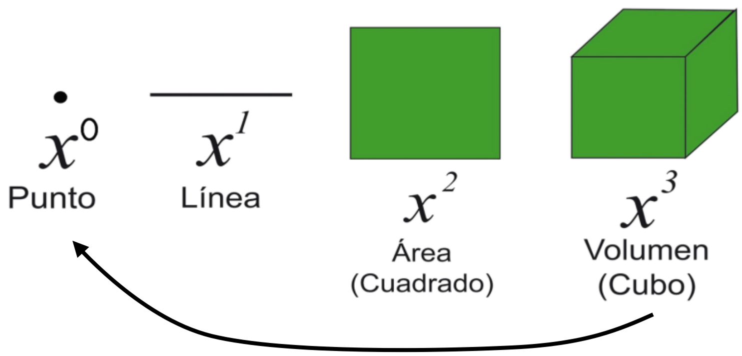
¿Cómo representar una expresión algebraica con exponente$\boldsymbol{x^4, x^5, x^6, etc.}$?

En este caso se aplica el concepto de ***álgebra con coeficiente compuesto***, donde se descompone por propiedades de potencias en dos bases, la primera base se la considera como coeficiente o ***cantidad*** y el exponente nos indica su ***forma,*** y la segunda base representa la ***longitud*** y el exponente su ***dimensión*** (x^3), por lo tanto se obtiene:
"La cantidad de cubos que se necesitan para representar la expresión algebraica".

La ventaja que propone el tema de **álgebra con coeficiente compuesto** es que se puede transformar los exponentes $x^4, x^5\ y\ x^6$ a un exponente conocido x^3 y convertirlo a cantidades de cubos según la base que se asigne, esto facilita la simplificación de términos semejantes, de esta manera se llega a una **nueva expresión equivalente**, comprobando esta equivalencia al asignar un valor numérico a la misma.

Para representar expresiones algebraicas con exponente mayor a tres, se distribuye la base de sus exponentes aplicando propiedades de potenciación, demostrado en forma práctica y visual, que se repite la ***forma de dimensión geométrica****, es decir: línea, cuadrado y cubo.*

Si la forma de la dimensión geométrica para exponente simple es:



x^4 **PRISMA LÍNEAL** x^5 **PRISMA BASE CUADRADA** $x^6 \ldots.etc$ **CUBO GRANDE DE CUBOS**

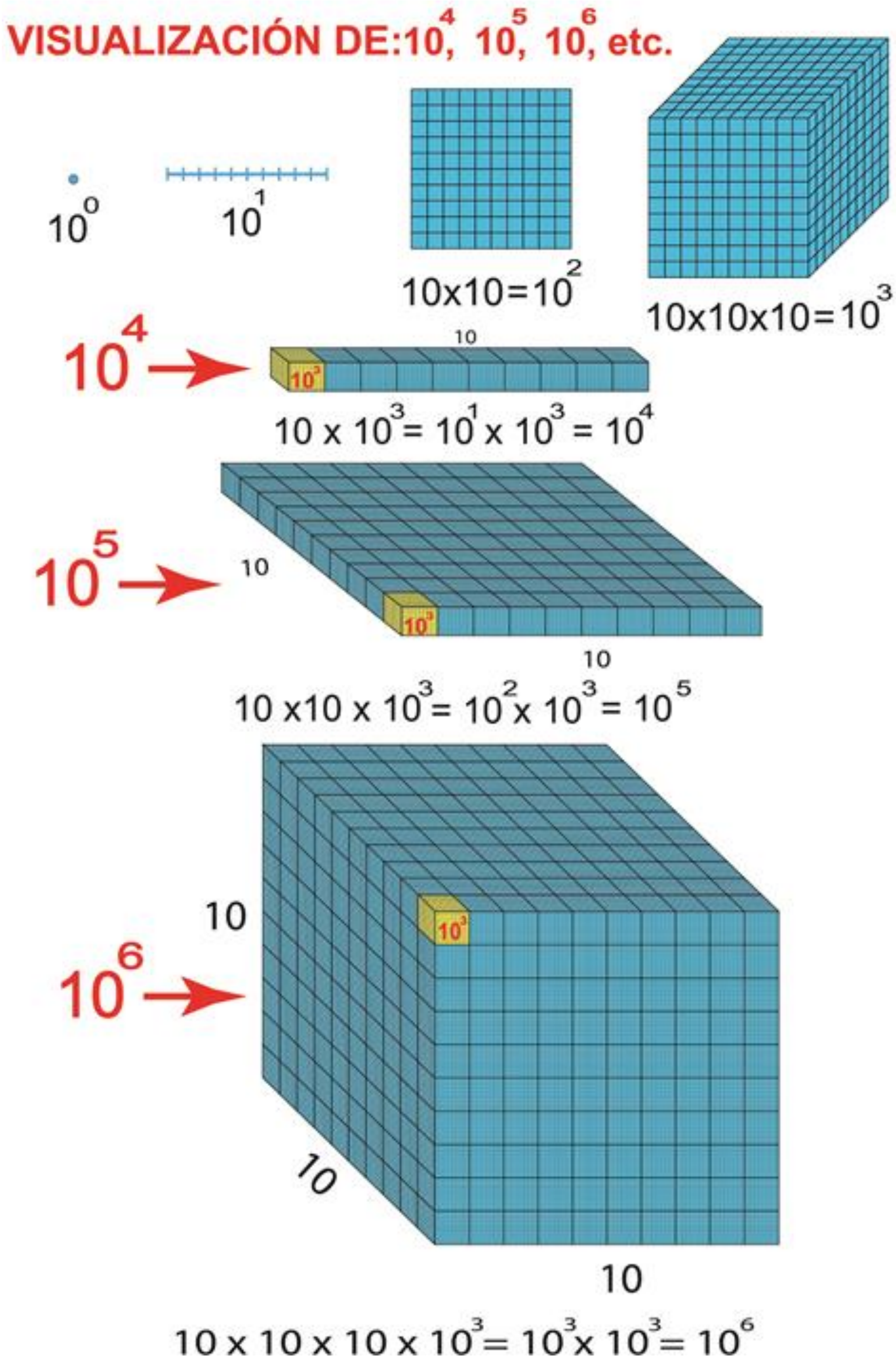
Podemos observar que se repite la forma de la dimensión geométrica, cuando se trata de representar expresiones con coeficiente compuesto.

Para x^7, x^8, x^9 ...etc., se considera que $x^7 = x^1x^6$ se multiplica a x^6 por una línea de x cantidades, formando un prisma rectangular con trayectoria horizontal, el cual se multiplica por otra línea y se forma un prisma de base cuadrada x^8 y esta base cuadrada se multiplica por su altura y se obtiene un cubo más grande x^9 y así sucesivamente.

Para asegurar esta demostración, podemos observar el comportamiento cíclico de los números aritméticos que comienzan desde el cero hasta el nueve, luego pasan a otra categoría, la cual es una combinación entre el uno y el cero, avanzando hasta el diecinueve, posteriormente vuelven a pasar a otra categoría, es decir una combinación entre el dos y el cero y así sucesivamente llegando al cien, luego a doscientos formando de esta manera una secuencia.

Veamos la demostración práctico visual para cada exponente:

Esto se puede aplicar en cualquier base, por ejemplo si la base $x = 10$, se tendría:



COMENTARIO SOBRE LA DEFINICIÓN DE LÍNEA:

Algunas definiciones establecen que:

- *Una **línea** es una sucesión continua de puntos (trazado), como por ejemplo un trazo o un guion.*
- *Una **línea** son cantidades infinitas de puntos***.**

Según las definiciones, consideran una línea como el **resultado** sumatorio de puntos o infinitos puntos, entonces esta afirmación nos indica que es una Cantidad Aritmética de puntos.

Como el punto geométrico no tiene dimensiones considerables y su fórmula sale $\boldsymbol{x^0 = 1}$. = . $\boldsymbol{punto}$ al sumar infinitos puntos o multiplicación entre si podemos afirmar que en ambos casos no avanza geométricamente para formar una línea.

Por ejemplo:

Sumar entre sí: $x^0 + x^0 + x^0 + x^0 + \cdots \infty = \sum x^0 =$ $cantidad\ aritmética\ de\ puntos$

Multiplicar entre si: x^0 x x^0 x x^0 x x^0 xx^0 x x^0 x … ∞ $=$ x^0 $= un\ punto$

En el primer caso no avanza porque no tiene dimensión considerable, da como resultado al sumar los coeficientes cantidades de puntos sin dimensión considerable y el segundo caso al multiplicar los coeficientes y sumar los exponentes tampoco avanza porque su exponente es de grado cero, dando como resultado un punto.

En ambos casos (suma o multiplicación) los puntos estarán uno encima del otro sin avance lineal.

Podemos afirmar entonces que una línea es **Geometría** y es el ***producto*** de una multiplicación del punto geométrico por una longitud o distancia.

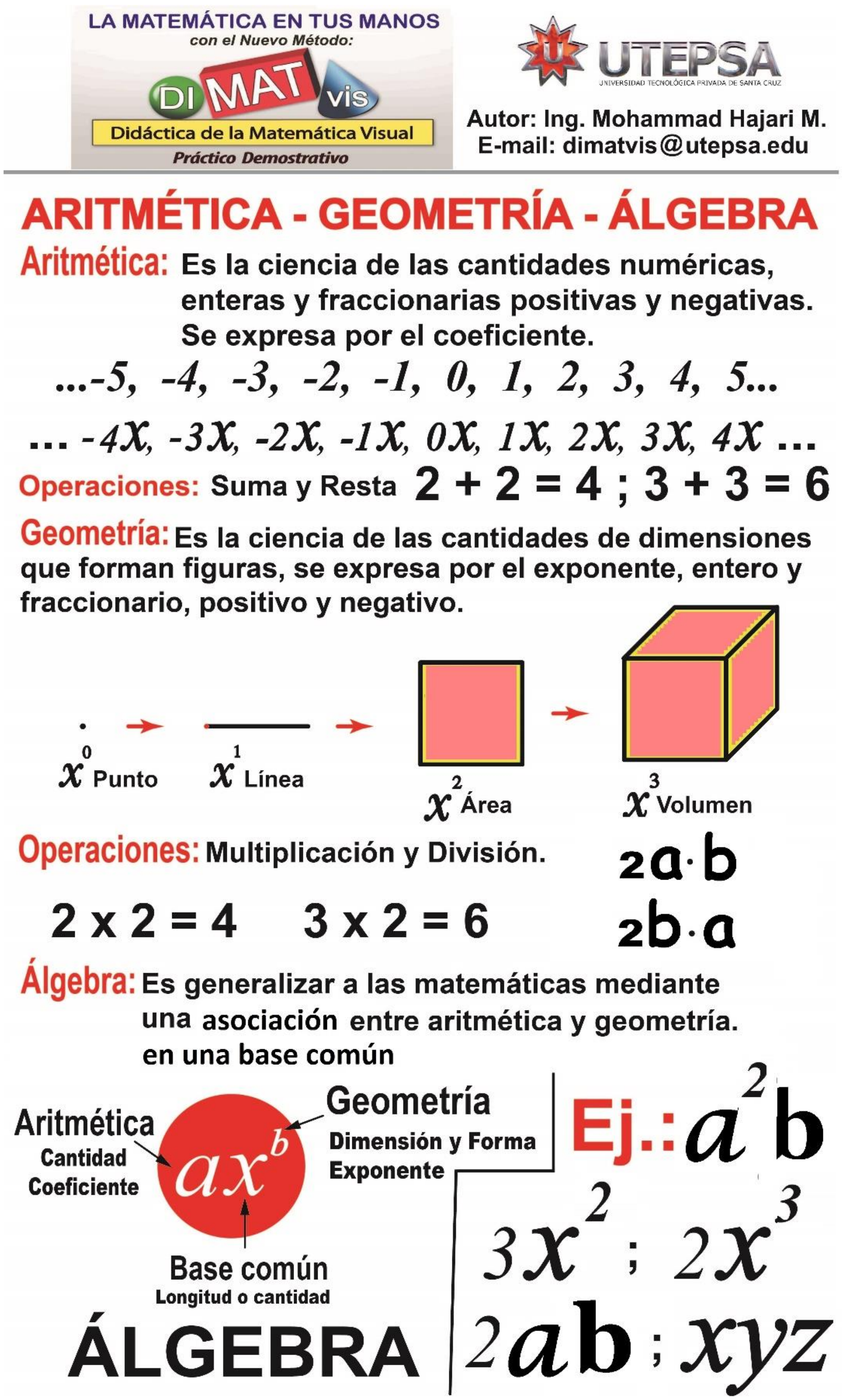
Por lo tanto **proponemos** que una línea es:

¨La trayectoria del movimiento del punto geométrico en cualquier forma y dirección¨

Es decir que el **producto** de multiplicar un punto por una longitud o distancia produce una línea. Matemáticamente podemos visualizar esta definición:

$$\boldsymbol{x^0} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x^{0+1}} = \underbrace{\cdot \times \boldsymbol{x^1}}_{Punto\ \times Longitud} \Rightarrow = \underbrace{\quad}_{Línea}$$

Banner de la demostración práctico y visual del algebra



DEMOSTRACIÓN PRÁCTICA VISUAL DE LAS FÓRMULAS DE ALGEBRA

1. $$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

2. $$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

3. $$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

4. $$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3b^2a$$

5. $$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6b^2a$$

6. $$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b^3 + 6a^2b$$

FACTORIZACIÓN

7. $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

8. $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

9. $$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

10. $$\frac{1}{2}\left\{x\left[(y+z)^2 - (y-z)^2\right] - 2xyz\right\} = xyz$$

11. $$(y+x)^2 - Q^2 = Q^2 - (y-x)^2 = 2xy$$

CONCEPTO DE LOGARITMO

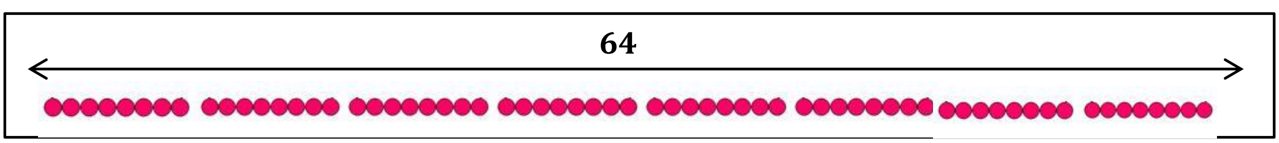
En una forma simple: "calcular el logaritmo es convertir un número aritmético **siempre positivo** como cantidad entero o fraccionario (grande o pequeño) a un exponente geométrico positivo o negativo" que define la cantidad de dimensiones y en otro sentido, se inicia desde el punto geométrico pasando por trazos hasta completar la línea de la base, desde esta línea forma áreas rectangulares hasta formar cuadrado de la base, luego pasa a los volúmenes desde prismas hasta llegar a un cubo y vuelve a repetir el mismo ritmo en otros exponentes.
El logaritmo reduce un número muy grande sobre una base y lo expresa con un exponente positivo. Por ejemplo un logaritmo en base 10:

$$\log 1000000 = x$$
$$10^x = 10^6 \longleftarrow \text{Logo o logaritmo}$$
$$x = 6$$

Porque $10^6 = 1000000$ por lo tanto es su logaritmo.
A los números pequeños o fraccionarios se los incrementa sobre una base y se expresa con un exponente negativo. Por ejemplo un logaritmo en base 10:

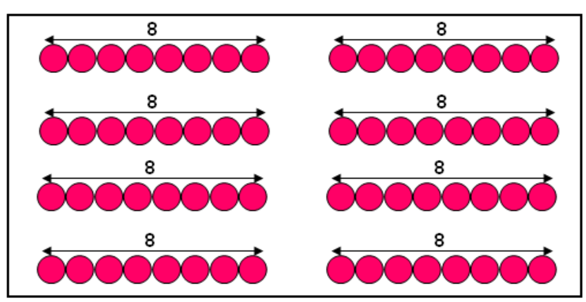
$$\log \frac{1}{1000000} = x$$
$$10^x = \frac{1}{1000000}$$
$$10^x = 10^{-6} \longleftarrow \text{Logo o logaritmo}$$
$$x = -6$$

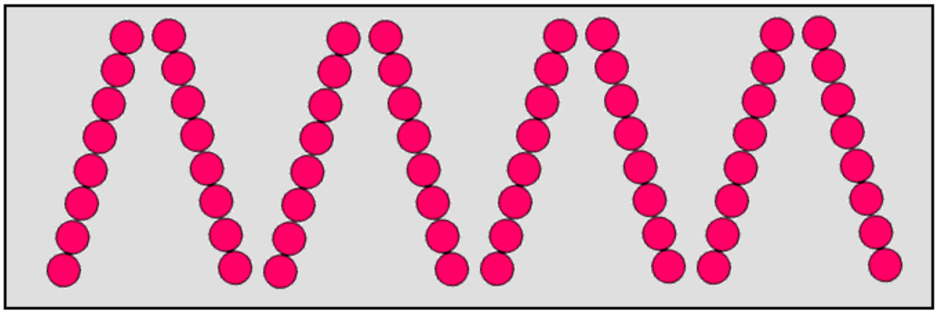
DEMOSTRACIÓN PRÁCTICA VISUAL DEL LOGARITMO
Ejemplo 1: **64** bolitas en forma lineal como un número aritmético, se pueden convertir a una figura geométrica cuadrada con base 8 $(\log_8 64) \Rightarrow$ **8 x 8** = **64** entonces 8^2 =64, el 2 es el exponente de 8, y el 2 es el logo de 64, como se observa en las siguientes imágenes que representa el número aritmético de 64:



Formando 8 agrupaciones de 8 bolitas:

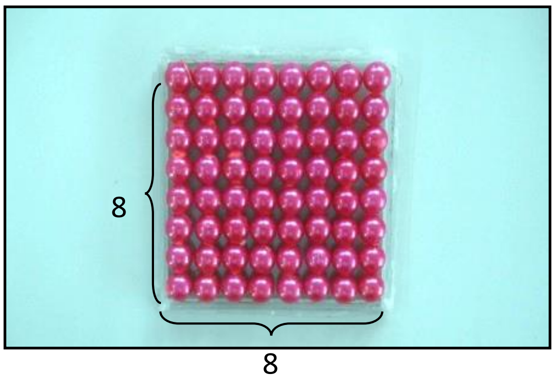
Gradualmente las 8 bolitas están formando el cuadrado:





CONVERTIR EN UN CUADRADO

Es convertir una cantidad aritmética a una figura geométrica con la base de 8 en este caso se convierte en un cuadrado.



Entonces $\mathbf{8^2 = 64}$ el exponente 2 que expresa al "cuadrado" es su logo, es decir representa un área (cuadrado), que define la cantidad de dimensiones.

$\mathbf{\log_8 64 = x}$

$\mathbf{8^x = 8^2}$

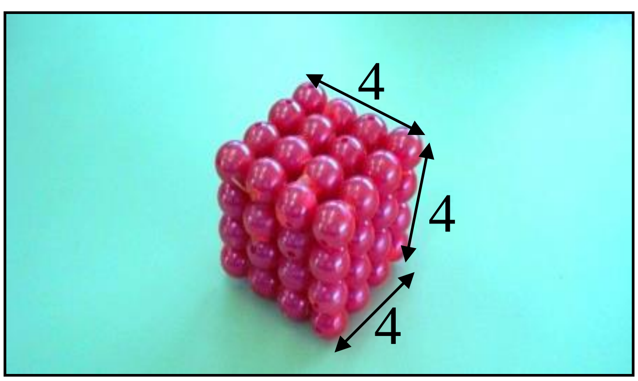
$\underline{\mathbf{x = 2}}$ ⇦ Logo es su exponente (Un Cuadrado)

Ejemplo 2:

Si el mismo número 64 se coloca sobre base 4 se formaría un cubo

⇒ 4 x 4 x 4 = 64 $(\mathbf{\log_4 64})$ entonces $4^3 = 64$.

CONVERTIR EN UN CUBO



Por eso $\mathbf{4^3}$ = 64 el exponente 3 que expresa el "cubo" es su logo como cantidad de dimensiones, es decir representa un volumen (Cubo).

$\mathbf{\log_4 64 = x}$

$\mathbf{4^x = 4^3}$

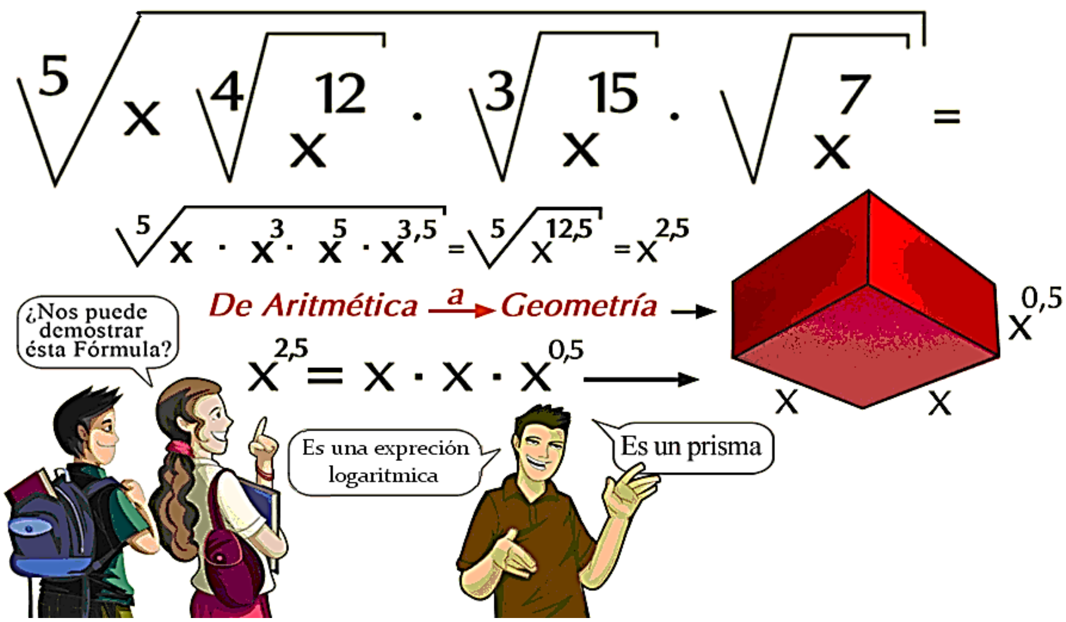
$\boxed{\mathbf{x = 3}}$ ⇦ **Logo (Un cubo)**

TRANSFORMACIÓN DE RAÍCES ARITMÉTICAS A EXPONENTES GEOMÉTRICOS

Teorema del exponente fraccionario:

$$\sqrt[a]{x^{b}} = x^{\frac{b}{a}} \qquad \text{¿Por qué?}$$

Logaritmo es convertir un número aritmético a un exponente geométrico, todas las siguientes expresiones pueden ser relacionadas con una operación logarítmica al visualizar su exponente, por ejemplo:

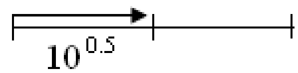
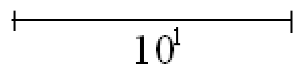
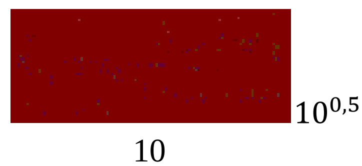
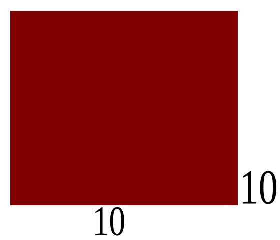
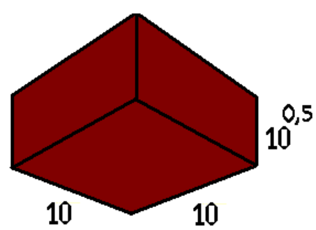
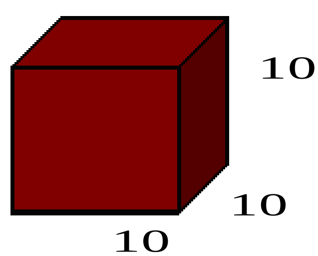


La siguiente Tabla muestra la conversión de aritmética a geometría y su exponente representa su logo.

Si consideramos $x = 10$ visualizaremos su logo e identificaremos que forma representan las siguientes raíces:

$$\sqrt{x}\ ;\sqrt{x^{2}}\ ;\sqrt{x^{3}}\ ;\sqrt{x^{4}}\ ;\sqrt{x^{5}}\ ;\sqrt{x^{6}}$$

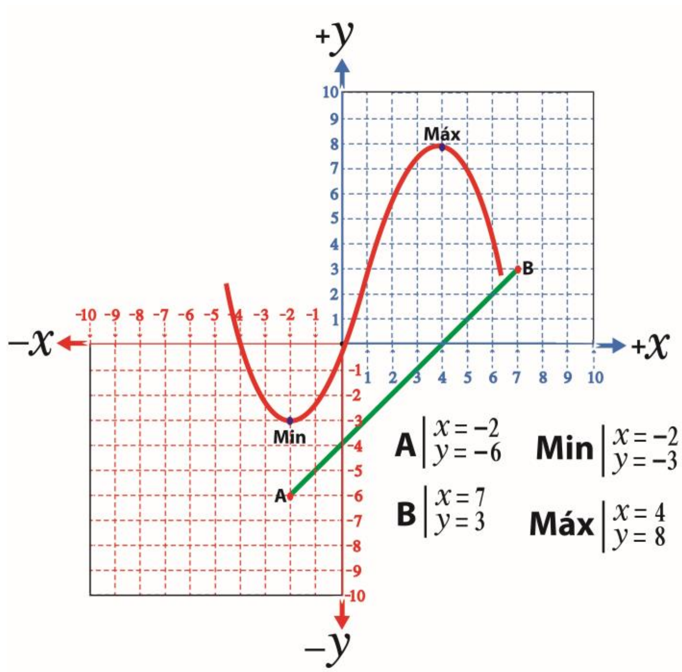
TABLA DE CONVERSIÓN DE RAÍCES CUADRADAS COMO VALORES ARITMÉTICOS A EXPONENTE GEOMÉTRICO (ESTO ES UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA)

VALOR ARITMÉTICO	EXPRESIÓN EXPONENCIAL	DIMENSIÓN - FORMA GEOMETRÍA	LOGO
$\sqrt{10} = 3.16$	$\mathbf{10^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5}}$		**0.5** Es un segmento
$\sqrt{10^2} = 10$	$\mathbf{10^{\frac{2}{2}} = 10^1}$		**1** Es una línea
$\sqrt{10^3} = 31,62$	$10^{\frac{3}{2}} = 10^{1,5}$ $10^{1,5} = 10 \cdot 10^{0,5}$		**1,5** Rectángulo
$\mathbf{\sqrt{10^4} = 10^2 = 100}$	$10^{\frac{4}{2}} = 10^2$ $10^2 = 10 \cdot 10$		**2** Es un cuadrado
$\mathbf{\sqrt{10^5} = 316.22}$	$\mathbf{10^{\frac{5}{2}} = 10^{2,5}}$ $\mathbf{10^{2,5} = 10 \cdot 10 \cdot 10^{0,5}}$		**2,5** Es un Prisma
$\mathbf{\sqrt{10^6} = 1000}$	$\mathbf{10^{\frac{6}{2}} = 10^3}$ $\mathbf{10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10}$		**3** Cubo

RECORDEMOS LAS TRES CLASES DE EJES DE COORDENADAS

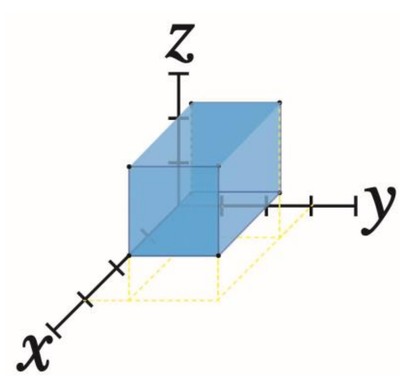
Ahora mostraremos en forma visual **tres clases de ejes de coordenadas:**

1. **Eje Aritmético,** con el avance según cantidades aritméticas desde el cero, enteros o fraccionarios, positivos o negativos, se ubican sus puntos gráficamente en dos dimensiones: eje de (x,y) o en el eje de tres dimensiones: eje de (x,y,z). Se utiliza en las funciones, líneas, curvas, estadística, etc. como se puede observar:



Gráficas en el plano de 2 dimensiones

El punto de origen en el plano (x,y) equivale a decir (0x;0y) por lo que consideramos su valor aritmético igual a cero.
En tres dimensiones podemos observar un prima en el eje (**x**,y,z):

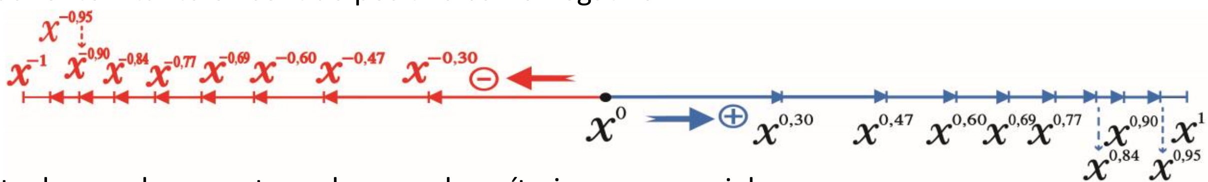


Nota: El eje de avance aritmético es el que actualmente se está utilizando.

2. **Eje Geométrico,** que avanza según el valor del exponente geométrico desde el cero, enteros o fraccionarios, tanto positivos como negativos, formando punto, trazos, líneas, áreas y volumen que es la base fundamental del avance exponencial o logarítmico.

Eje geométrico hasta exponente 1 (línea):

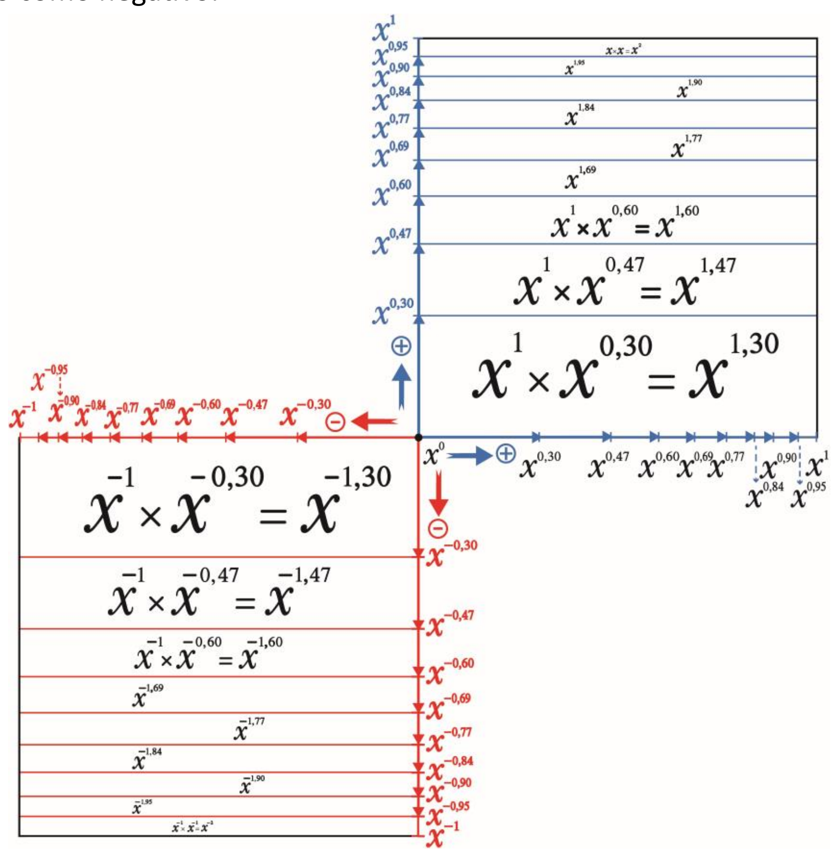
Eje geométrico de avance exponencial comenzando desde el punto geométrico con el exponente 0 formando trazos con exponentes fraccionarios hasta completar la línea con exponente 1 tanto en sentido positivo como negativo.



Nota: las escalas muestran el avance logarítmico exponencial.

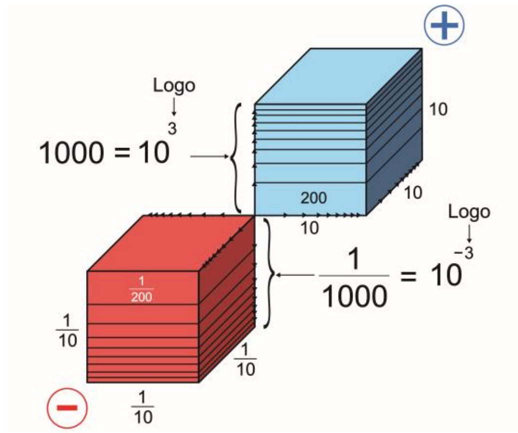
Eje geométrico hasta exponente 2 (cuadrado):

Formando la línea completa pasara a otra dimensión formando áreas rectangulares con el exponente mayor que 1 hasta llegar al exponente 2 que es un cuadrado de la base tanto en sentido positivo como negativo.



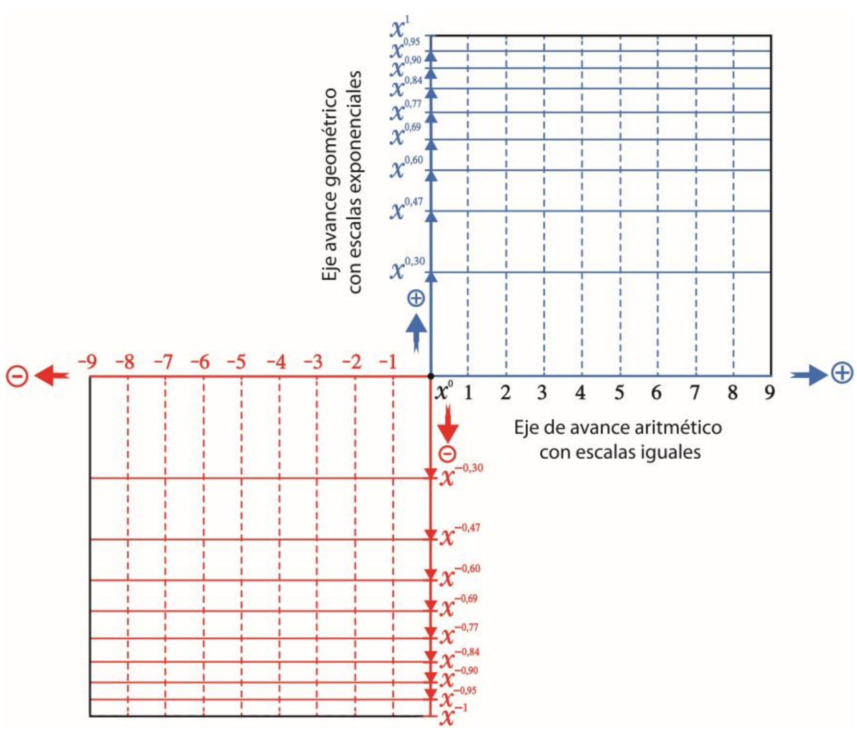
Eje geométrico hasta exponente 3 (cubo):

Desde el cuadrado de la base avanza a la tercera dimensión formando prismas con base cuadrada con el exponente mayor que 2 y menor que 3 hasta formar el cubo tanto en sentido positivo como negativo, como se puede observar:



.

3. Eje Mixto es decir un eje aritmético, que será el horizontal, con escala lineal aritmética y otro geométrico, que será el vertical, con escala geométrica exponencial. Por la razón que el uno aritmetico corresponde al **punto geometrico sin avance** y tenemos nueve avances geométricos en el eje vertical, por lo tanto la escala en el eje de x aritmetico son en este caso nueve divisiones iguales, como se puede observar:



En este caso vemos que el punto geométrico (x^o) y el cero aritmético (0x) están juntos. En este eje graficaremos la curva de avance logaritmico.

AVANCE LOGARITMICO EN SENTIDO POSITIVO

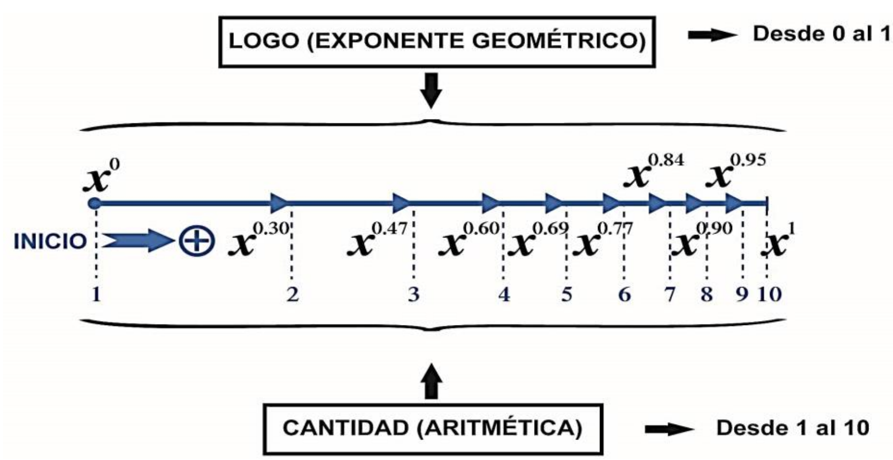
AVANCE DEL EXPONENTE FRACCIONARIO DEL PUNTO GEOMÉTRICO CON EL EXPONENTE 0 (x^0)HASTA COMPLETAR UNA LÍNEA CON EXPONENTE 1 (x^1)

El avance del punto geométrico, equivalente al exponente cero, es progresivo y forma un trazo o semilínea que se extiende hasta completar la línea cuando el exponente llega a uno, que quiere decir una dimensión completa.

TABLA DEL AVANCE LOGARÍTMICO DE BASE 10 Y CANTIDAD ARITMÉTICA DEL 1 AL 10

LOGARÍTMO NÚMERO ARITMÉTICO	LOGO EXPONENTE GEOMÉTRICO	EXPRESIÓN EXPONENCIAL	DIMENSIÓN – GEOMETRÍA EN SENTIDO POSITIVO (+)
$\log 1$	0	10^0	
$\log 2$	0,30	$10^{0,30}$	
$\log 3$	0,47	$10^{0,47}$	
$\log 4$	0,60	$10^{0,60}$	
$\log 5$	0,69	$10^{0,69}$	
$\log 6$	0,77	$10^{0,77}$	
$\log 7$	0,84	$10^{0,84}$	
$\log 8$	0,90	$10^{0,90}$	
$\log 9$	0,95	$10^{0,95}$	
$\log 10$	1	10^1	

GRÁFICO DEL AVANCE LOGARÍTMICO DESDE EL PUNTO GEOMÉTRICO HASTA LA LÍNEA DE LA BASE



NOTA: Según el avance logarítmico decimal considerando $\mathbf{x = 10}$

La cantidad aritmética es considerada como el argumento del logaritmo.

> **REGLA**: Una línea completa $\mathbf{X}$ es cuando su exponente es 1, es decir, una dimensión completa.

AVANCE LOGARÍTMICO DE LA LÍNEA DE LA BASE, A LA BASE CUADRADA EN SENTIDO POSITIVO.

Normalmente para la curva de una función construimos una tabla de valores y los ejes de coordenadas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ pero en el caso de logaritmos según su definición convierte un número aritmético a un exponente geométrico por lo tanto ya tiene sus propias variables, formando sus propios ejes geométricos.

Aquí se debe observar un crecimiento variable del exponente (empieza con incrementos grandes que disminuyen gradualmente).

Con esto se puede observar que al cambiar de dimensión se van completando áreas rectangulares, hasta formar un cuadrado de área igual a 100, es decir:

Logo

$$\mathbf{A_{cuadrado}} = \mathbf{10^2 = 10 \times 10 = 100}$$

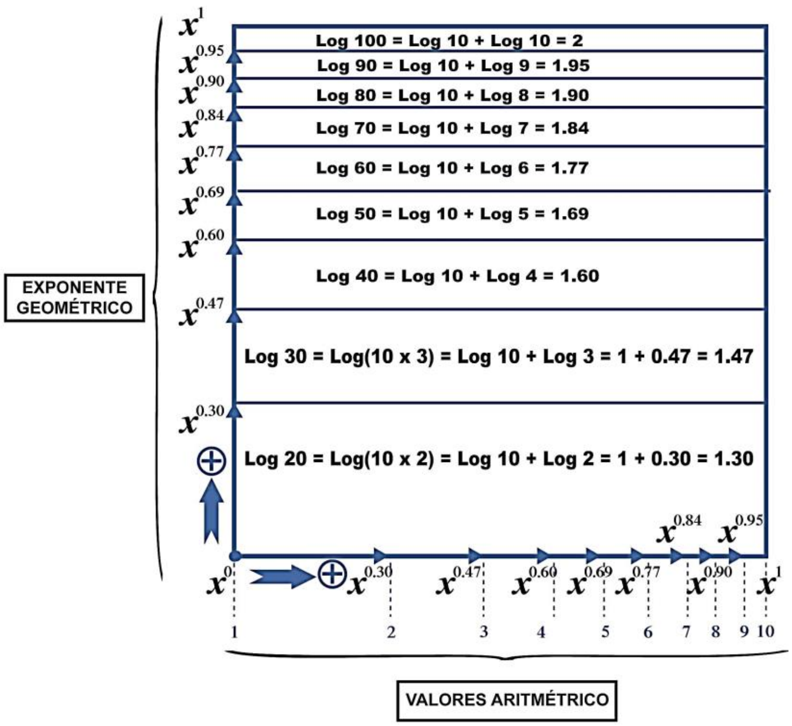
TABLA DEL AVANCE LOGARITMO PARA FORMAR SU ÁREA CON UNIDAD DE LA BASE LINEAL HASTA EL CUADRADO, DEL 10 AL 100

LOGARITMO DE NÚMEROS ARITMÉTICOS	LOGO EXPONENTE GEOMÉTRICO	EXPRESIÓN EXPONENCIAL
$\log 10$	1	10^{1}
$\log 20$	1,30	$10^{1,30}$
$\log 30$	1,47	$10^{1,47}$
$\log 40$	1,60	$10^{1,60}$
$\log 50$	1,69	$10^{1,69}$
$\log 60$	1,77	$10^{1,77}$
$\log 70$	1,84	$10^{1,84}$
$\log 80$	1,90	$10^{1,90}$
$\log 90$	1,95	$10^{1,95}$
$\log 100$	2	10^{2}

RECORDEMOS: "$\log_{10} 10$" es la línea que será la unidad de base para formar áreas rectangulares hasta llegar área cuadrada".

GRÁFICO DEL AVANCE LOGARÍTMICO DE LA LÍNEA DE LA BASE AL CUADRADO EN SENTIDO POSITIVO.

Recordamos que $\mathbf{x = 10}$ $\quad$ $\mathbf{donde:}$ $\quad$ $\mathbf{10 \times 10 = 10^2 = 100}$



Una vez completada la línea base, se empieza a cambiar de dimensión en forma de superficies rectangulares de valor:

$$\boxed{\mathbf{A = largo \times ancho}}$$

Por ejemplo: Para calcular el Logaritmo de 20 se demuestra con el método la propiedad del logaritmo de un producto y se tendría:

$$\boxed{\mathbf{\log_b(A \times B) = \log_b A + \log_b B}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\log 20 = \log(10 \times 2)} &= \mathbf{\log 10 + \log 2} \\ &= \mathbf{1 + 0{,}30} \\ &= \mathbf{1{,}30} \end{aligned}$$

Utilizando la curva logarítmica, este valor se podrá visualizar relacionando los valores del eje horizontal (10) y del eje vertical (2), cuya área rectangular será 10 x 2 = 20, aquí se están multiplicando cantidades aritméticas que se convierten en exponentes geométricos, por ejemplo: $10^1 \times 10^{0{,}30} = 10^{1{,}30}$(aplicando propiedad de potencias en la multiplicación de la misma base los exponentes se suman).

Ahora bien, aplicando logaritmos a esta área y utilizando la propiedad del producto se tendrá:

$$\mathbf{\log_{10} 20 = \log_{10}(10 \times 2) = \log_{10} 10 + \log_{10} 2 = 1 + 0.30 = 1.30}$$

EJE HORIZONTAL EJE VERTICAL

Lo que coincide exactamente con lo explicado anteriormente, el avance para el eje horizontal va hasta completar la línea de la base que es 1 ($\log_{10} 10 = 1$) y al cambiar de dimensión, para el eje vertical se obtiene 0.3 ($\log_{10} 2 = 0{,}30$), con lo que se puede demostrar el por qué cuando se multiplica con la misma base los exponentes se suman, hasta formar la base cuadrada donde el:

$$\mathbf{\log 100 = \log(10 \times 10) = \log 10 + \log 10 = 1 + 1 = 2}$$

AVANCE LOGARITMICO EN SENTIDO NEGATIVO

NÚMEROS FRACCIONARIOS SIEMPRE POSITIVOS Y EXPONENTES NEGATIVOS.

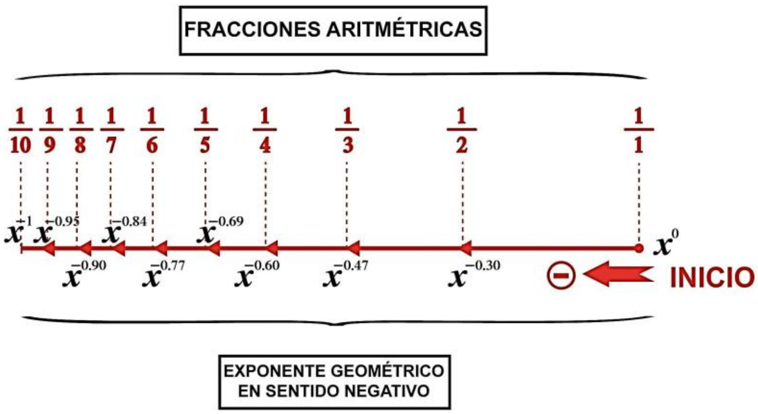
El punto geométrico es donde empieza el avance logarítmico, para los números mayores que 1 es en sentido positivo y para los números menores que 1 o fracciones avanza en sentido negativo

TABLA DEL AVANCE LOGARÍTMICO CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

LOGARITMO CON NÚMEROS FRACCIONARIOS	LOGO EXPONENTE GEOMÉTRICO	EXPRESIÓN EXPONENCIAL	DIMENSIÓN – GEOMETRÍA EN SENTIDO NEGATIVO (-)
$\text{Log}\left(\frac{1}{1}\right)$	0	10^{0}	•
$\text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)$	- 0,30	$10^{-0,30}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{3}\right)$	- 0,47	$10^{-0,47}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{4}\right)$	- 0,60	$10^{-0,60}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{5}\right)$	- 0,69	$10^{-0,69}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{6}\right)$	- 0,77	$10^{-0,77}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{7}\right)$	- 0,84	$10^{-0,84}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{8}\right)$	- 0,90	$10^{-0,90}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{9}\right)$	- 0,95	$10^{-0,95}$	
$\text{Log}\left(\frac{1}{10}\right)$	- 1	10^{-1}	

GRÁFICO DEL AVANCE LOGARÍTMICO CON NÚMEROS FRACCIONARIOS Y EXPONENTE NEGATIVO EN SENTIDO NEGATIVO

Veamos ahora como va su avance gráfico en sentido negativo:



MUY IMPORTANTE: Para poder graficar, consideraremos que la línea completa tiene 10cm. y se puede decir que cada exponente es una parte del avance de esta línea.

AVANCE LOGARÍTMICO DE LA LÍNEA DE LA BASE A LA BASE CUADRADA EN SENTIDO NEGATIVO

Al aplicar logaritmo a la base da como resultado el exponente (ejemplo $\mathbf{log\frac{1}{2} = \ -0.30}$), el avance a partir del punto geométrico (x^0 = 1 • = •) es por segmentos hasta completar una línea recta (en sentido negativo u opuesto), esto significa que se ha completado el inverso de la base $\mathbf{log\frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^{-1}}$; este concepto nos puede demostrar el porqué $\mathbf{\frac{1}{x} = \ x^{-1}}$.

Al cambiar de dimensión el comportamiento es idéntico, o sea, el avance empieza con incrementos grandes y termina con incrementos pequeños en sentido negativo u opuesto hasta completar el inverso de la base ($\mathbf{\frac{1}{10}}$); con esto se puede observar que al cambiar de dimensión se van completando áreas rectangulares, hasta formar un cuadrado de área igual a $\mathbf{\frac{1}{100}}$

$$\mathbf{A_{cuadrado} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}}$$

Si se calcula el Logaritmo de $\mathbf{\frac{1}{100}}$ se tiene:

$$\mathbf{log\frac{1}{100} = \ -2}$$

El valor 2 representa el exponente de la base, que significa una medida de un cuadrado lo cual exactamente representa el área del cuadrado y el signo negativo indica el sentido opuesto.
Utilizando la curva logarítmica, estos valores se podrán visualizar relacionando los valores del eje horizontal y del eje vertical. Por ejemplo:

$$\mathbf{\log\frac{1}{20} = -1.3}$$

Aplicando la propiedad de un producto de un logaritmo se tendrá:

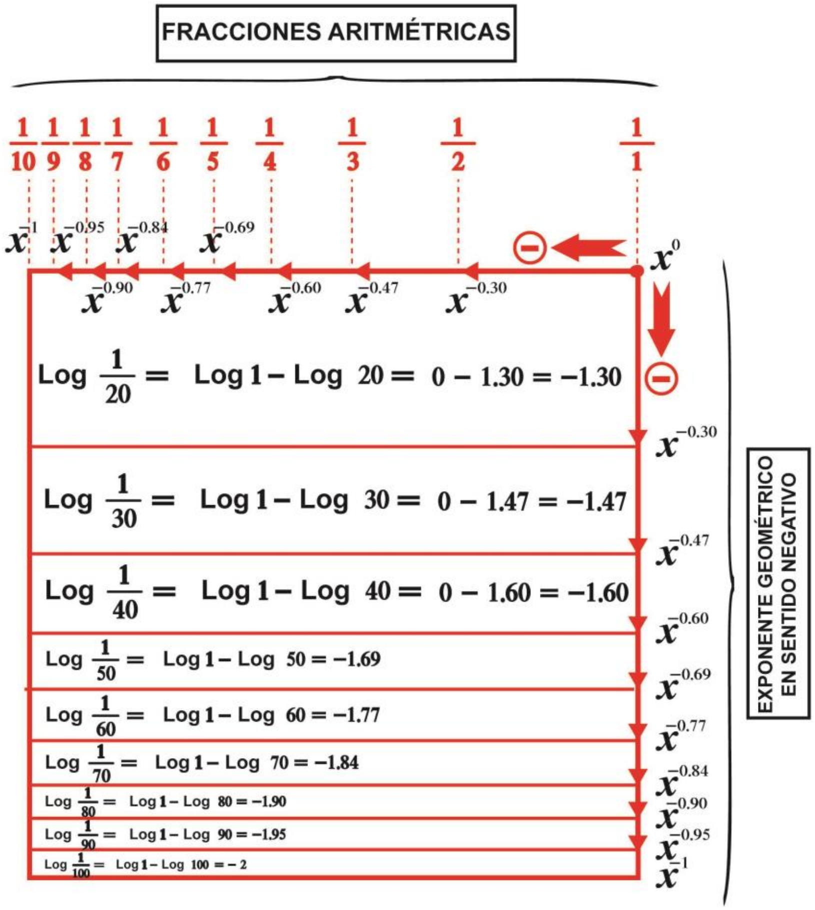
$$\mathbf{\log\frac{1}{20} = \log\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}\right) = \log\frac{1}{10} + \log\frac{1}{2} = -1 + (-0.3) = -1.3}$$

EJE HORIZONTAL ⟶ $\log\frac{1}{10}$ EJE VERTICAL ⟶ $\log\frac{1}{2}$

TABLA DEL AVANCE LOGARÍTMICO PARA FORMAR EL ÁREA COMENZANDO CON LA BASE LINEAL HASTA LLEGAR AL CUADRADO, DE $\frac{1}{10}$ AL $\frac{1}{100}$

LOGARITMO DE FRACCIONES ARITMÉTICAS	LOGO (EXPONENTE GEOMÉTRICO)	EXPRESIÓN EXPONENCIAL GEOMÉTRICA
$\log\frac{1}{10}$	-1	10^{-1}
$\log\frac{1}{20}$	-1,30	$10^{-1,30}$
$\log\frac{1}{30}$	-1,47	$10^{-1,47}$
$\log\frac{1}{40}$	-1,60	$10^{-1,60}$
$\log\frac{1}{50}$	-1,69	$10^{-1,69}$
$\log\frac{1}{60}$	-1,77	$10^{-1,77}$
$\log\frac{1}{70}$	-1,84	$10^{-1,84}$
$\log\frac{1}{80}$	-1,90	$10^{-1,90}$
$\log\frac{1}{90}$	-1,95	$10^{-1,95}$
$\log\frac{1}{100}$	-2	10^{-2}

RECORDEMOS: "$\mathbf{\log_{10}\frac{1}{10}}$" es la línea que será la unidad de base para formar el cuadrado" en sentido negativo, como se observa en la siguiente gráfica:



Como se explicó anteriormente, el avance para el eje horizontal es hasta completar el inverso de la base ($\log\frac{1}{10} = -1$) y al cambiar de dimensión, para el eje vertical se obtiene -0.3, con lo que se puede demostrar el por qué los números fraccionarios tienen una característica 10^{-1} y mantisa ($10^{-0,30}$) ambas negativas $\mathbf{x^{-1} \cdot x^{-0,30} = x^{-1+(-0,30)} = x^{-1,30}}$

Lo que complementa perfectamente la definición: **"Logaritmo es convertir un número aritmético grande o pequeño siempre positivo a un exponente geométrico positivo para número mayor que 1 y negativo por los números menores que 1, es decir fraccionario"**, para este ejemplo el número aritmético es $\mathbf{\frac{1}{20}}$ cuyo exponente geométrico es -1.3 quiere ser ($\mathbf{\log\frac{1}{20} = -1.3}$) También se puede demostrar utilizando la propiedad de la división.

¿COMO GRÁFICAR LA CURVA LOGARÍTMICA?

Para graficar la curva logarítmica, como hemos dicho anteriormente no necesitamos elegir los ejes de coordenadas "$\mathbf{x}$" ni tampoco "$\mathbf{y}$", ya que el logaritmo por su definición y su avance comienza desde el punto geométrico, y al recibir números aritméticos forma sus propios ejes y éste lo convierte en una figura geométrica.

Ahora podemos realizar la gráfica "LA BASE" de escala lineal (eje horizontal con divisiones iguales), y un avance logarítmico (eje vertical son **9** lo cual el **1** pertenece al inicio del punto geométrico, $x^0 = 1 \bullet = \bullet$).

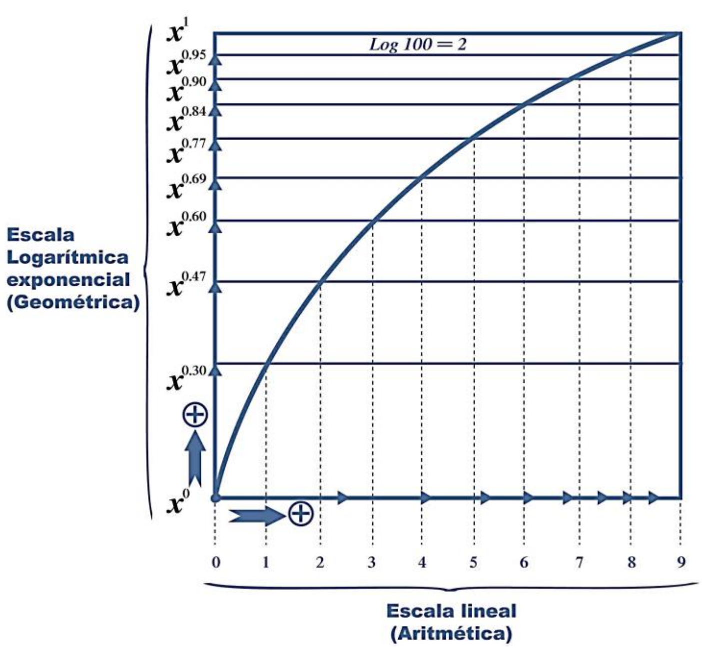
TABLA DE VALORES PARA GRAFICAR LA CURVA DEL LOGARITMO EN SENTIDO POSITIVO

Eje horizontal Escala lineal	Eje vertical Escala logarítmica
0	10^0
1	$10^{0,30}$
2	$10^{0,47}$
3	$10^{0,60}$
4	$10^{0,69}$
5	$10^{0,77}$
6	$10^{0,84}$
7	$10^{0,90}$
8	$10^{0,95}$
9	10^1

En esta tabla los números de la escala lineal son distancias iguales en el eje horizontal y el eje vertical las escalas de avance logarítmico son exponenciales.

Así mismo podemos comparar los valores lineales con los logarítmicos. Los avances lineales siempre son iguales o proporcionales, a diferencia de los logarítmicos, cuyos avances disminuyen gradualmente.

Veamos ahora su representación gráfica:

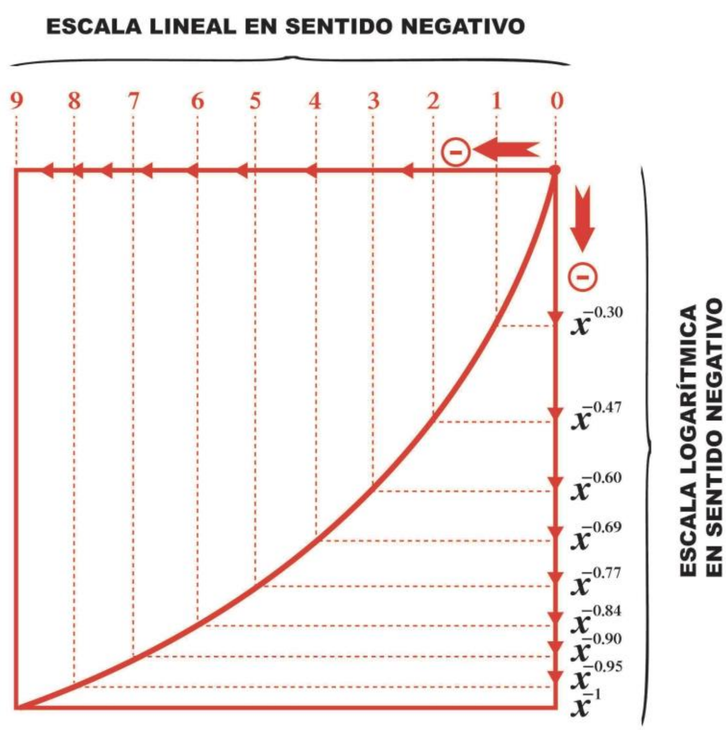


La curva confirma que el cero de escala lineal horizontal coincide con el cero geométrico que representa el punto (x^0)' para la escala exponencial, por lo tanto la primera escala lineal (1) corresponde al primer avance logarítmico que es $10^{0,3}$, el segundo avance lineal (2) se relaciona con $10^{0,47}$ y así sucesivamente hasta el último valor de la tabla teniendo un total de 9 avances logarítmicos.

TABLA DE VALORES PARA GRAFICAR LA CURVA DE LOGARITMO FRACCIONARIO EN EL SENTIDO NEGATIVO

Eje horizontal Escala lineal	Eje vertical Escala logarítmica
0	$\mathbf{10^{0}}$
1	$\mathbf{10^{-0,30}}$
2	$\mathbf{10^{-0,47}}$
3	$\mathbf{10^{-0,60}}$
4	$\mathbf{10^{-0,69}}$
5	$\mathbf{10^{-0,77}}$
6	$\mathbf{10^{-0,84}}$
7	$\mathbf{10^{-0,90}}$
8	$\mathbf{10^{-0,95}}$
9	$\mathbf{10^{-1}}$

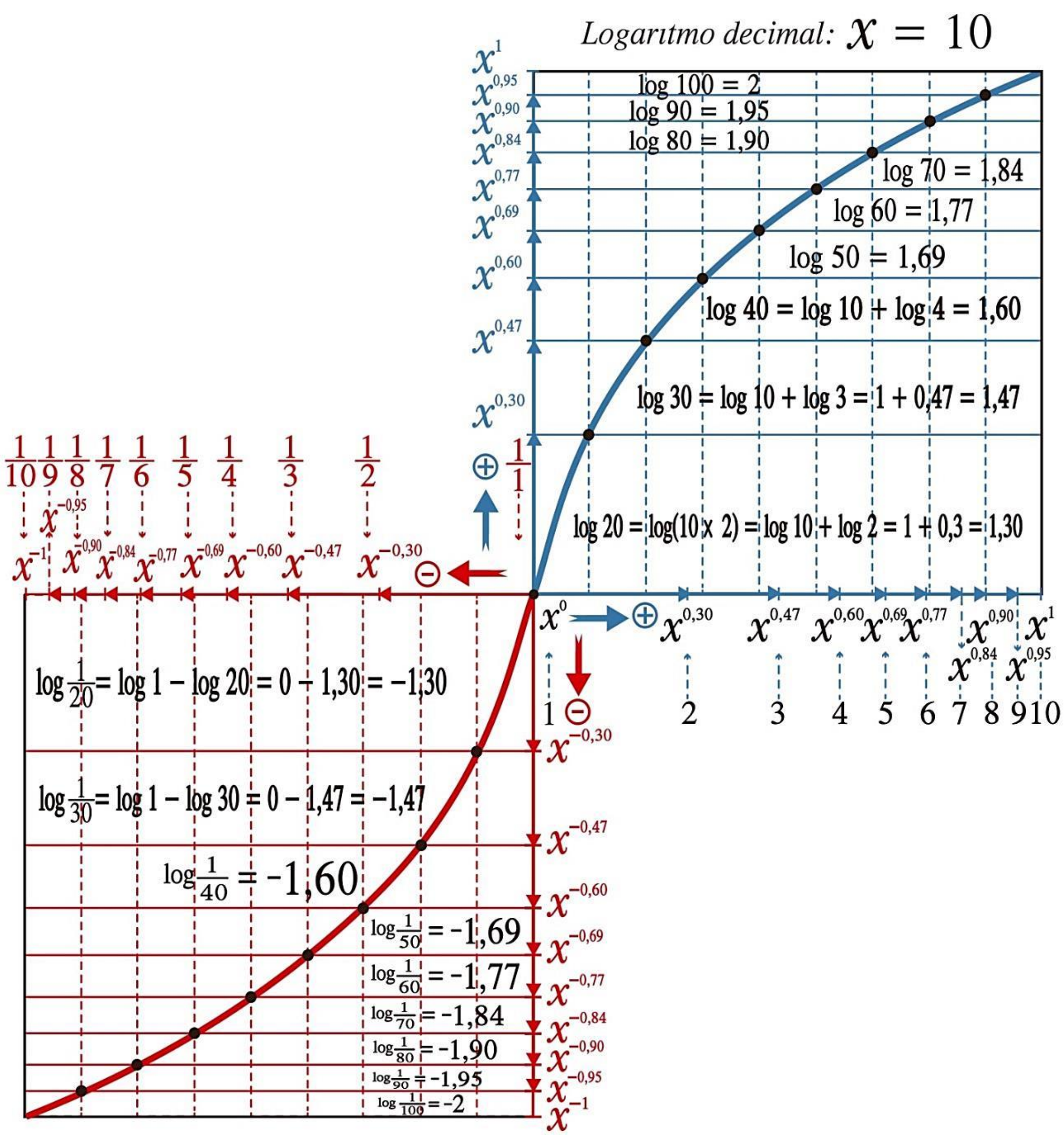
Veamos ahora su representación gráfica:



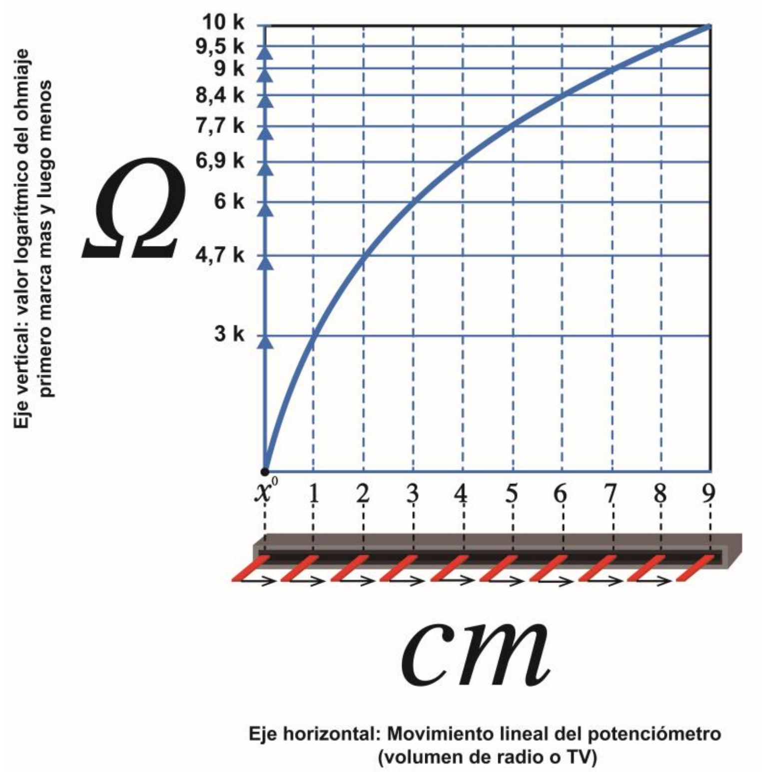
CURVA DE AVANCE LOGARITMICO SENTIDO POSITIVO Y NEGATIVO

Como se puede observar el eje aritmético (Horizontal) comienza en el número uno, junto con el eje geométrico (x^o) (Vertical), debido a que no existe logaritmo de valor cero, por lo tanto éste eje de coordenadas mixto, nos ayuda a graficar la curva de avance logarítmico, es decir que el primer avance aritmético horizontal corresponde al primer avance geométrico vertical, el segundo avance aritmético al segundo avance geométrico y así sucesivamente hasta completar la curva logarítmica, como se ve en la siguiente página:

CURVA DE AVANCE LOGARÍTMICO EN SENTIDO POSITIVO Y NEGATIVO

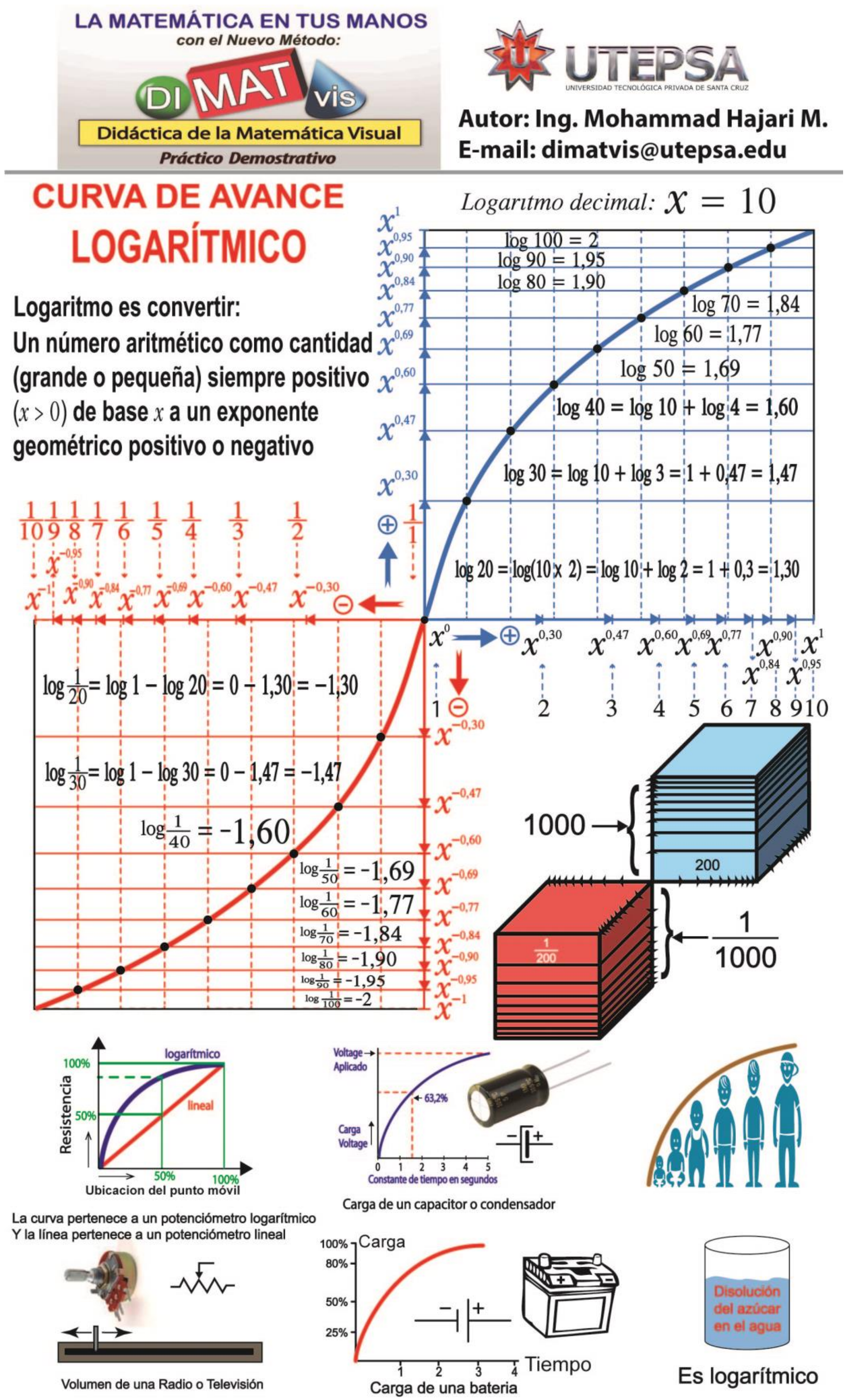


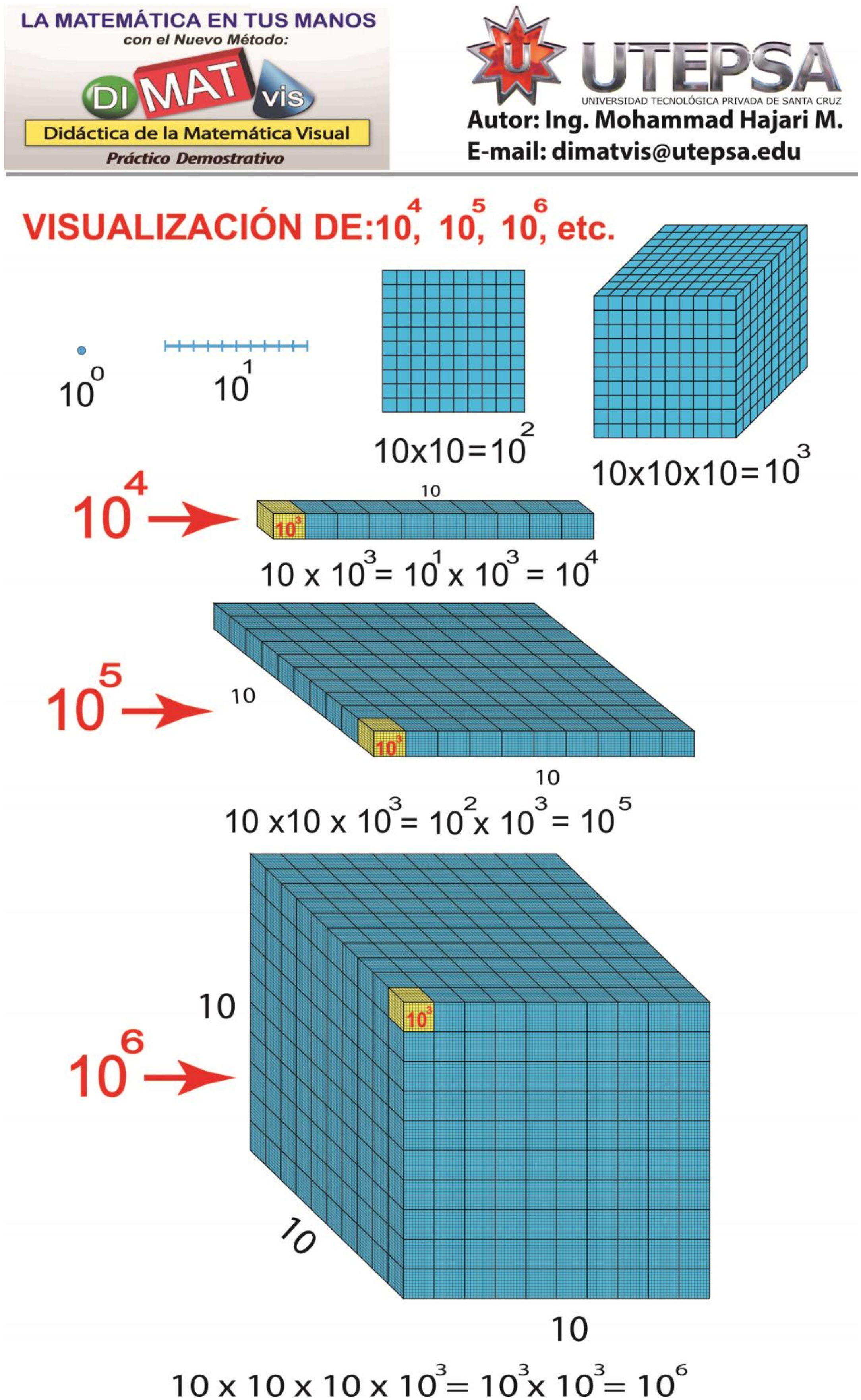
Ejemplo: El movimiento lineal del eje del potenciómetro del volumen de una radio o televisión es artimético y el valor del ohmniaje es logarítmico, como podemos observar en la siguiente gráfica:



Recordemos: El punto geométrico (xº) indica aritméticamente ¨uno¨ por el coeficiente, geométricamente es ¨un punto¨ por su exponente cero y algebraicamente es ¨un punto¨.

Banner de la demostración práctico y visual del logaritmo y sus aplicaciones




LA MATEMÁTICA EN TUS MANOS
con el Nuevo Método:
DI MAT vis
Didáctica de la Matemática Visual
Práctico Demostrativo
UTEPSA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA PRIVADA DE SANTA CRUZ
Autor: Ing. Mohammad Hajari M.
E-mail: dimatvis@utepsa.edu
VISUALIZACIÓN DE: 10^4, 10^5, 10^6, etc.
10^0
10^1
$10 \times 10 = 10^2$
$10 \times 10 \times 10 = 10^3$
10^4
10
10^3
$10 \times 10^3 = 10^1 \times 10^3 = 10^4$
10^5
10
10^3
10
$10 \times 10 \times 10^3 = 10^2 \times 10^3 = 10^5$
10
10^6
10^3
10
10
$10 \times 10 \times 10 \times 10^3 = 10^3 \times 10^3 = 10^6$

EL *ARCO* DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

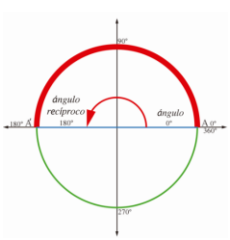
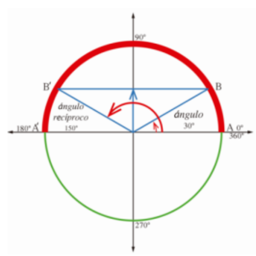
Cuando es conocido el valor de la **razón trigonométrica** pero se desea conocer el valor del ángulo al que le corresponde dicha razón, se aplica una operación que da como resultado dos valores posibles del ángulo, que toma en cuenta el concepto de ángulos recíprocos.
Es cierto que existen infinitos ángulos con el mismo valor de Seno que corresponden a las posiciones en cada vuelta cumplida en el círculo trigonométrico, pero en la práctica, por lo general los cálculos se reducen a los ángulos ente 0^o y 36 0^o
La expresión que representa esta operación se denota por: *arc*

- ## Arco Seno

En la fig. se observa, como ejemplo, el valor $Senx=12$ para el ángulo dado de 30º y su reciproco de 150º .Las operaciones *arc* que conducen a los valores de estos ángulos son:

$$arc\ Sen\frac{1}{2} = 30^o \quad Y \quad arc\ Sen\frac{1}{2} = 150^o$$

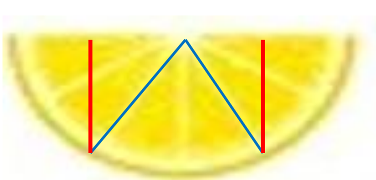
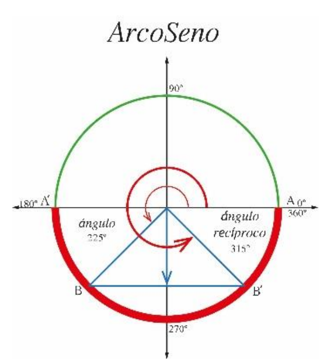
Siendo: $150^o = 180^o - 30^o$ o $180^o = 30^o + 150^0$

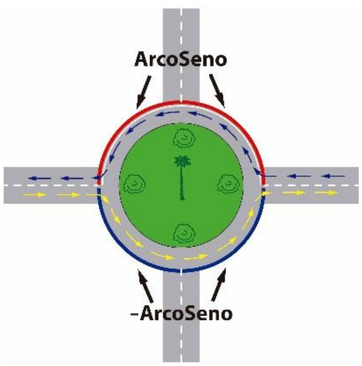

En el caso de la figura, $Senx=0$ conduce a

$$arc\ Sen\ 0 = 0^o \quad Y \quad arc\ Sen\ 0 = 180^o$$

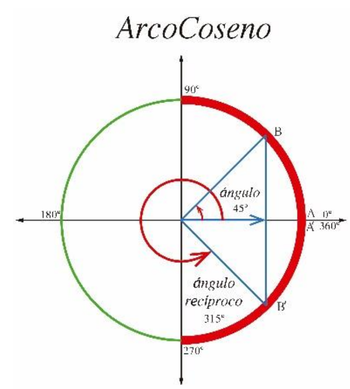
En general, al considerar los infinitos pares de ángulos comprendidos entre 0º y180º y, que comparten el mismo valor de razón trigonométrica Seno , se determina un arco que abarca la semicircunferencia superior que representa visualmente el concepto de la operación arc , de esta manera el arco que se muestra en la figura, corresponde a la razón seno de signo positivo es decir : $Senx \geq 0$, de todos los pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco) comprendidos por los cuadrantes primero y segundo

De manera análoga, al considerar los infinitos pares de ángulos que comparten el mismo valor de razón trigonométrica seno, comprendidos entre 180^o y 360^o , se determina un arco que abarca la semicircunferencia inferior , que representa visualmente el concepto de *arc* de esta manera el arco que se muestra en la fig., corresponde a la razón Seno de signo negativo es decir : $\mathrm{Sen}x \leq 0$, de todos los pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco)



En la práctica se visualizan los arcos para seno positivo y seno negativo cuando se considera la circulación de vehículos por una rotonda como se muestra en la fig.



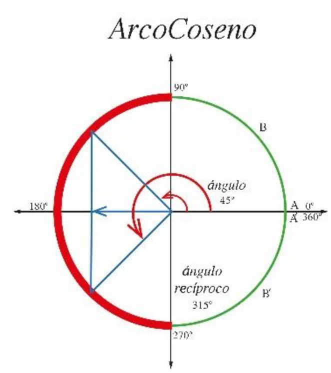
- Arco Coseno

En la fig. se observa, como ejemplo, el valor del coseno para el ángulo dado de 45º y su reciproco de 315º las operaciones que conducen a los valores del ángulo son:

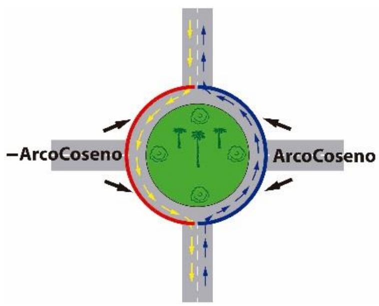
$\text{arc coseno x} = 45o$ y $\text{arc coseno x} = 315o$

Siendo: $315o = 360o\text{-}45o$ o $360o = 315o + 45o$

Al considerar los infinitos pares de ángulos que comparten el mismo valor de razón trigonométrica Coseno, se determina un arco que abarca una semicircunferencia vertical que representa visualmente el concepto de la operación arco, de esta manera el arco de la derecha que se muestra en la figura corresponde a la razón Coseno de signo positivo es decir: $\mathrm{Cosen}x \geq 0$, para todos los pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco) comprendidos por los cuadrantes primero y cuarto



De manera análoga, al considerar los infinitos pares de ángulos que comparten el mismo valor de razón trigonométrica Coseno de signo negativo, es decir $\text{Cosen x} \leq 0$ comprendidos entre 90 y 270 , se determina un arco que abarca la semicircunferencia izquierda , de todos los pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco) comprendidos por los cuadrantes segundo y tercero



En la práctica se visualizan los arcos para coseno positivo y coseno negativo cuando se considera la circulación de vehículos por una rotonda como se muestra en la fig.

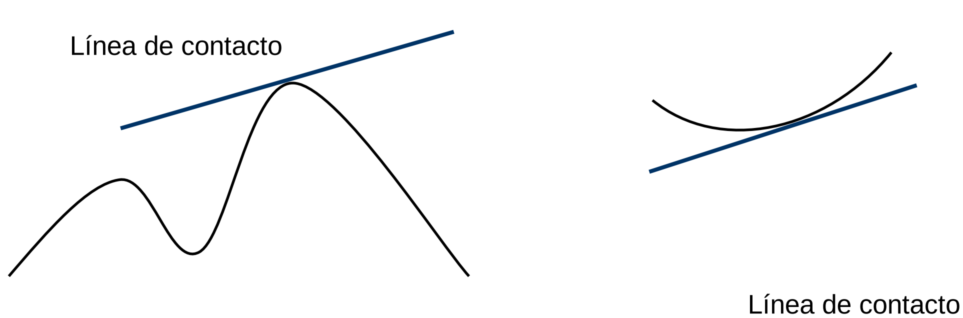
Línea de contacto

En la matemática se utiliza la tangente como una línea recta que toca en un sólo punto una curva cualquiera, de igual manera se considera que tangente es una función trigonométrica que tiene relación con Seno y Coseno.

En el idioma persa y árabe a ésta línea se llama: "*Khate Momas*" que significa *una línea que toca un punto en una curva cualquiera.*

Entonces se propone cambiar el nombre de la recta tangente por un nombre común como ser: ***"Línea de contacto", cuya pendiente gradual es la derivada de la curva hasta llegar a un punto máximo o mínimo.***

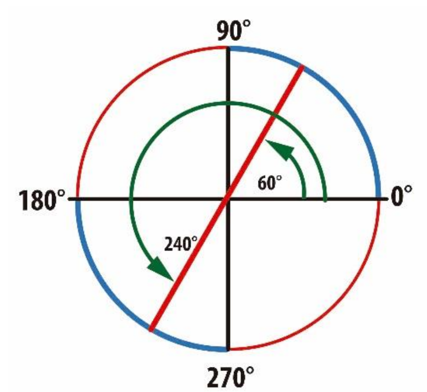
Gráficamente:



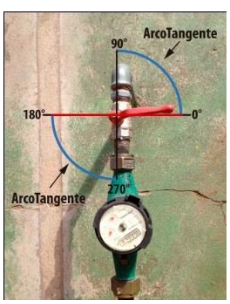
- Arco Tangente

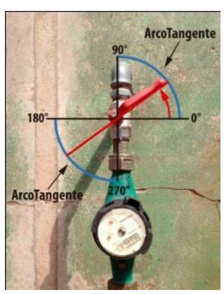
En la fig se observa, como ejemplo, el valor de la tangente para el angulo dado de 60° y su reciproco de 240° las operaciones que conducen a los valores del angulo son:

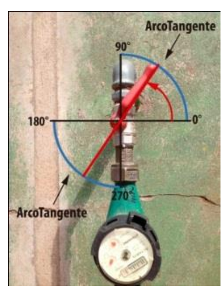
$\text{arc tag } x = 60^{o}$ y $\text{arc tag } x = 240^{o}$
Siendo: $240^{o} = 60^{o} + 180^{o}$ o $60^{o} = 240^{o} - 180^{o}$

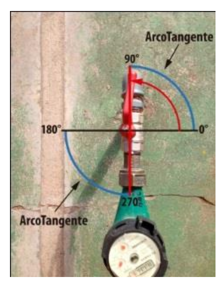


Al considerar los infinitos pares de ángulos que comparten el mismo valor de razón trigonométrica, se determina un arco que abarca el cuarto de circunferencia superior derecho que representa visualmente el concepto de arc. El arco que se muestra en la figura corresponde a la razón trigonométrica Tangente de signo positivo es decir: $\text{Tag}x \geq 0$,de todos los pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco) comprendidos por los cuadrantes primero y tercero

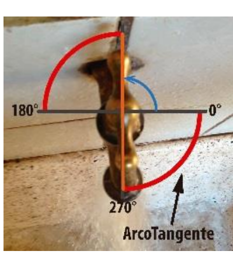


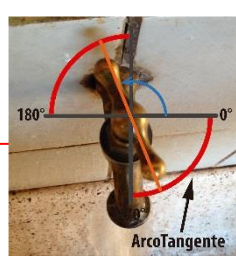


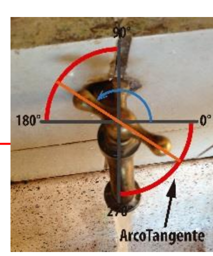


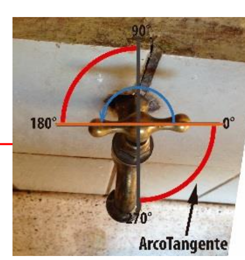


De manera análoga, al considerar los infinitos pares de ángulos (ángulo dado y su reciproco) que comparten el mismo valor de razón trigonométrica Tangente de signo negativo, es decir $\text{Tag } x \leq 0$ comprendidos en el segundo y cuarto cuadrante , se determina un arco que abarca el cuarto de circunferencia inferior derecho.









VISUALIZACION Y APLICACIÓN DE LAS RELACIONES TRIGONOMETRICAS

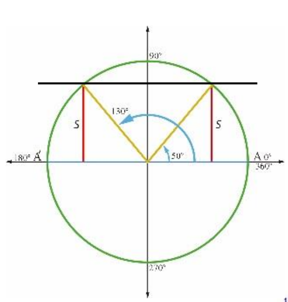
Las relaciones trigonométricas se representan en forma gráfica a través de las llamadas líneas trigonométricas referidas a un círculo de radio unitario.

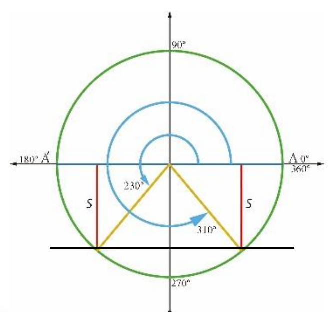
- **Línea trigonométrica de la relación seno**

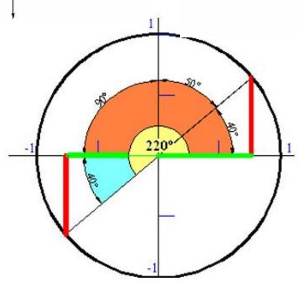
Los ángulos cuyo seno tiene el mismo valor S, presentan su lado extremo en una posición tal que su intersección con la circunferencia, fijan dos puntos que determinan una recta paralela al eje de las abscisas de manera que su distancia al eje coincide con el valor S del seno de los ángulos dados.

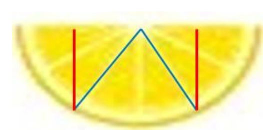
Para los ángulos del primer y segundo cuadrante las líneas trigonométricas muestran valores positivos ,es decir

$\mathrm{Sen}x \geq 0$Para los ángulos del tercer y cuarto cuadrante las líneas trigonométricas muestran valores negativos, es decir $\mathrm{Sen}x \leq 0$





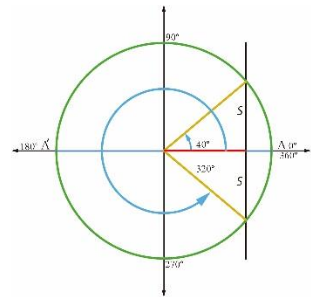




El valor de la razón seno se obtiene en un triángulo rectángulo calculando el cociente entre el cateto opuesto del ángulo y la hipotenusa .Cuando se refiere este triángulo al círculo trigonométrico, la hipotenusa toma el valor uno, coincidente con el radio, por lo que la medida del cateto es directamente e l valor del Seno . Resulta así, además de una simplificación muy conveniente a los fines del cálculo, que la línea trigonométrica que representa al Seno siempre debe estar aplicada sobre un arco de circunferencia que implica la necesidad del uso del radio, tal como se muestra en las figuras .

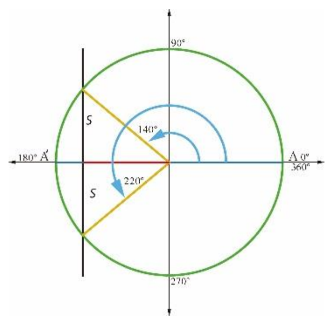
- **Línea trigonométrica de la relación coseno**

Los ángulos cuyo Coseno tiene el mismo valor C, presentan su lado extremo en una posición tal que su intersección con la circunferencia, fija dos puntos que determinan una recta paralela al eje de las ordenadas, de manera que su distancia al eje coincide con el valor C del Coseno de los ángulos dados.



Para los ángulos del primer y cuarto cuadrante las líneas trigonométricas muestran valores positivos , es decir $\text{Cosen}x \geq 0$

Para los ángulos del segundo y tercer cuadrante, las líneas trigonométricas muestran valores negativos, es decir $\text{Cosen } x \leq 0$

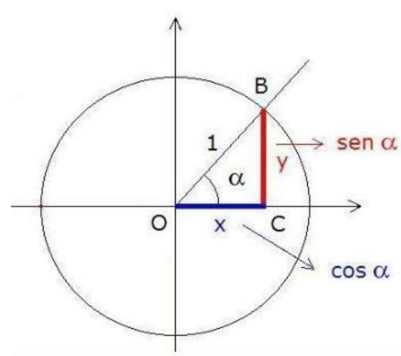


Al aplicar a la razón Coseno, una simplificación similar e idénticas consideraciones realizadas en la relación Seno, también en el caso de la línea trigonométrica que representa al Coseno, es necesario que siempre este aplicada a un arco de circunferencia, tal como se muestra en las figuras para los valores de $\text{Cosen}x \geq 0$ y $\text{Cosen } x \leq 0$.

,

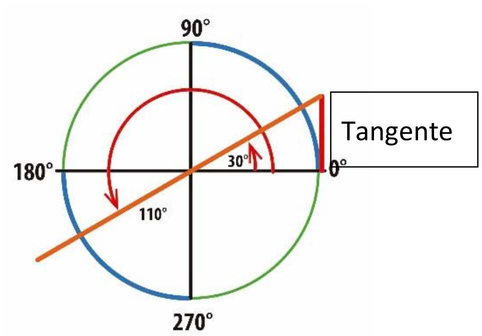
Las relaciones Seno y Coseno están referidas al círculo trigonométrico cuyo radio coincide con la hipotenusa, todas estas medidas se mantiene dentro de dicho círculo.

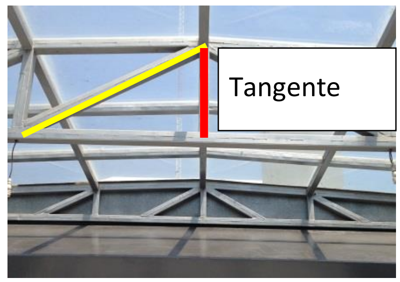
- **Línea trigonométrica de la relación tangente**

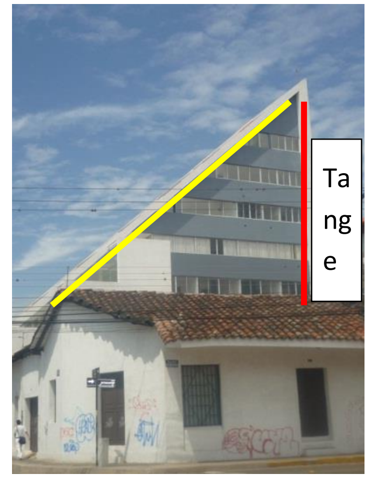


La línea que representa a la tangente se **visualiza** en el círculo trigonométrico como aquella línea trazada en forma vertical por el punto de contacto con el círculo en el ángulo 0º

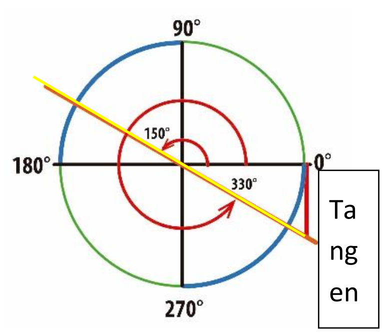
Para los ángulos del primer y tercer cuadrante, el valor de la tangente está medido en el sentido del semieje positivo de las ordenadas. En la práctica se **aplica** como en los casos mostrados en las fotografías adjuntas.



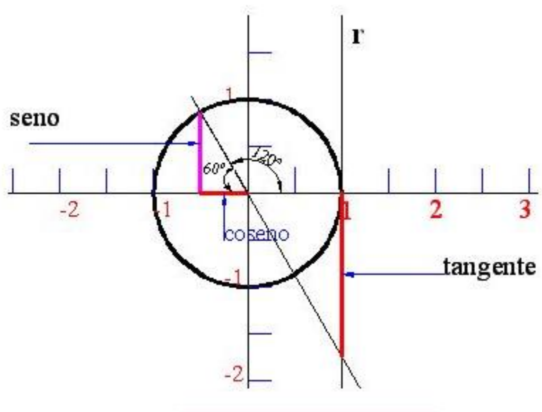


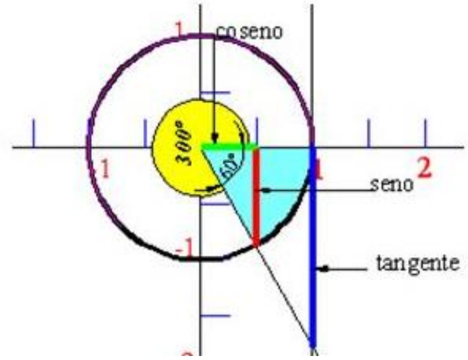


Para los ángulos del segundo y cuarto cuadrante, el valor de la tangente se mide en el sentido del semieje negativo de las ordenadas. En la práctica se aplica en los casos mostrados en las fotografías adjuntas.



En un triángulo rectángulo el valor de la tangente se obtiene calculando el cociente entre los valores de los catetos de dicho triángulo, pero al referirlo al círculo trigonométrico, su valor y su signo se obtiene con el cociente entre los valores de Seno y Coseno correspondientes . La línea que representa la Tangente se encuentra fuera del circulo por lo que ya no es necesario que dependa de su radio, esta situación se visualiza en las figuras mostradas.



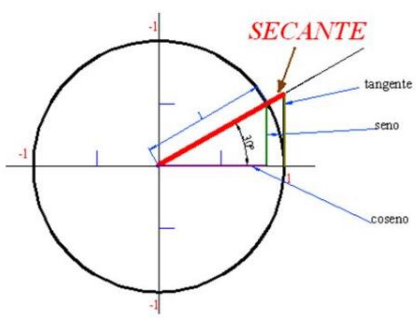


Caso con seno positivo y coseno negativo

Caso con seno negativo y coseno positivo

Línea trigonométrica de la relación secante

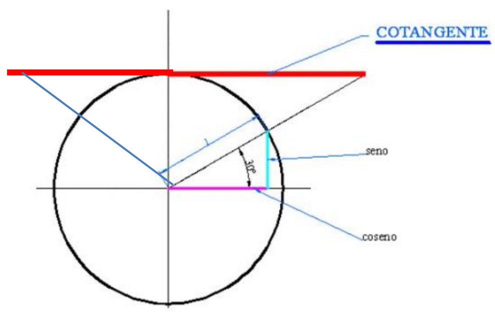
La línea que representa a la secante se visualiza en el círculo trigonométrico como aquella línea trazada sobre el lado extremo del angulo y que coincide con el radio del círculo, supera a la circunferencia y se prolonga hasta cortar a la línea de la tangente, el valor de la secante siempre es mayor que el radio.

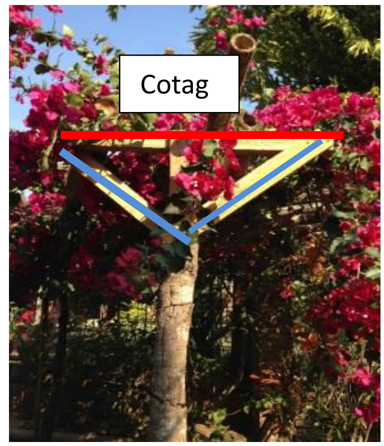


Línea trigonométrica de la relación cotangente

La línea que representa a la cotangente se visualiza en el círculo trigonométrico como aquella línea trazada en forma horizontal por el punto de contacto con el circulo en el ángulo 90°.

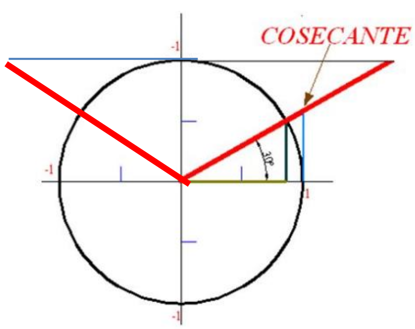
Para ángulos del primer y tercer cuadrante el valor de la cotangente se mide en el sentido del semieje positivo de las abscisas y para ángulos del segundo y cuarto cuadrante en el sentido negativo del semieje de las abscisas





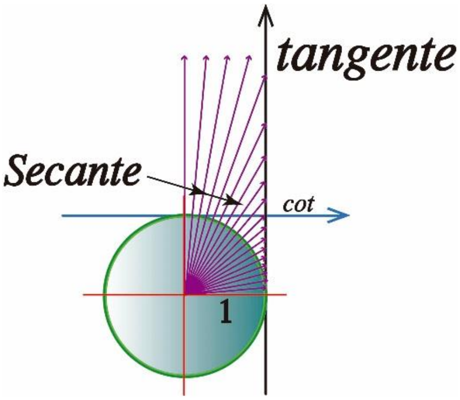
Línea trigonométrica de la relación cosecante

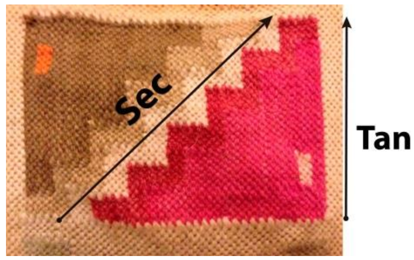
La línea que representa a la cosecante se visualiza en el círculo trigonométrico como aquella línea trazada sobre el lado extremo del ángulo que coincide con el radio del circulo, supera a la circunferencia y se prolonga hasta cortar a la línea de la cotangente

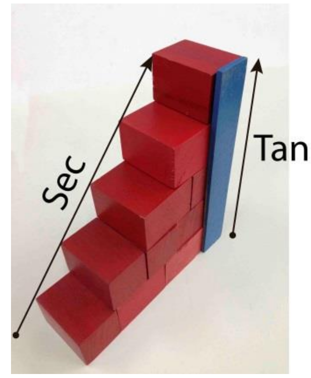


Propiedad de la Trigonometría: la relación entre tangente y secante

La línea secante aparece cuando se genera la línea tangente y se la puede visualizar como un apoyo de ésta. Estas líneas no presentan la necesidad de estar referidas a un circulo

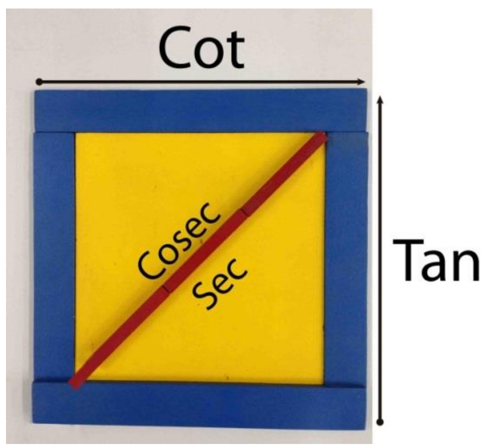




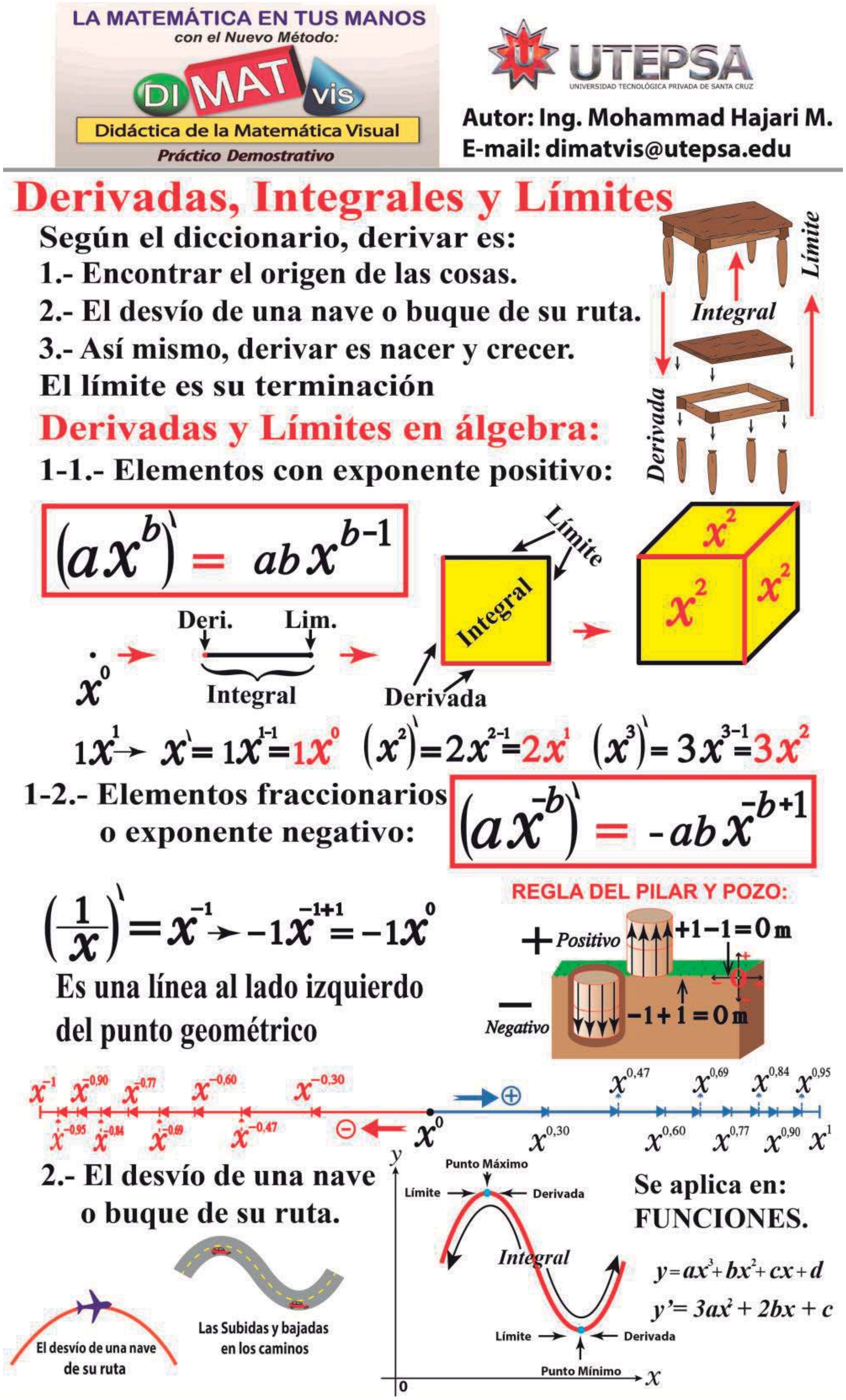


Propiedad de la Trigonometría: la relación entre cotangente y cosecante

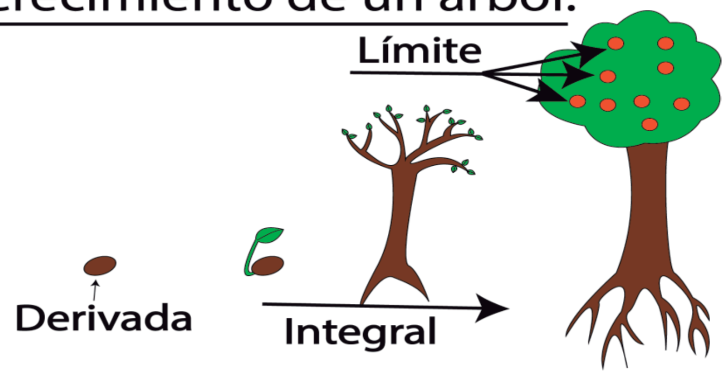
La línea cosecante solo aparece cuando se genera la línea cotangente y se puede visualizar como un apoyo de esta



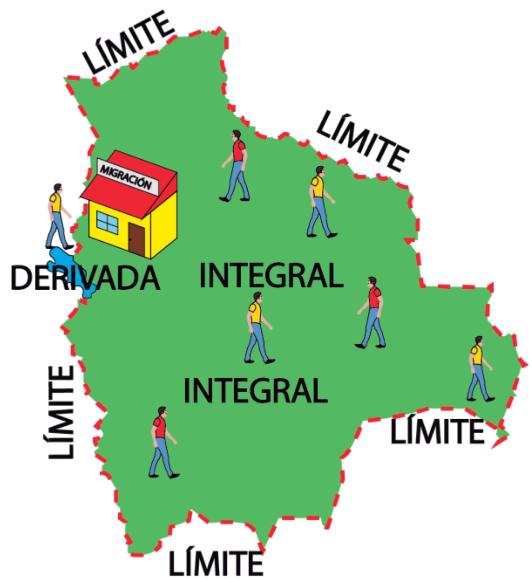
Banner de la demostración práctico y visual del cálculo



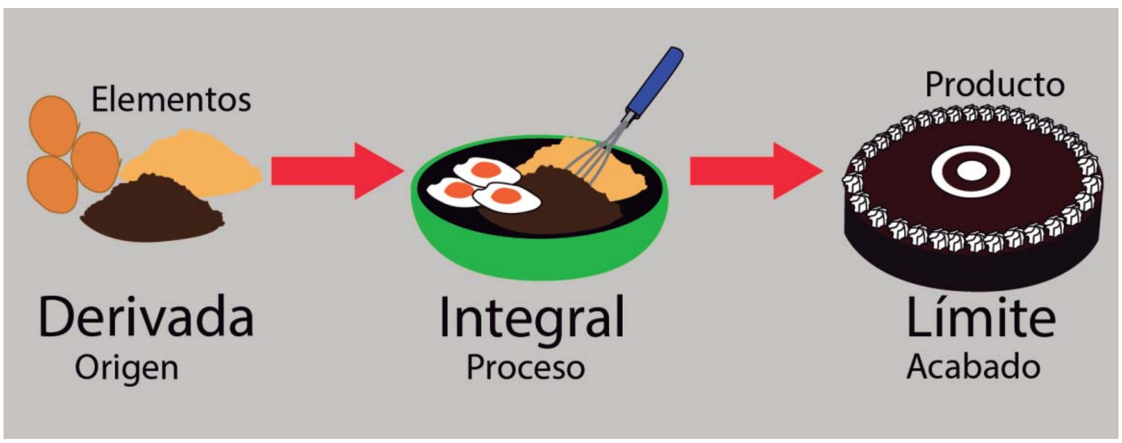
Crecimiento de un árbol:



Entrada:
a un país:



Elaboración de una torta:



Montaje de un Foco: