



“CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”  
Multidisciplinario  
10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México  
ISBN: 978-607-95635

## **HERRAMIENTA COMPUTACIONAL EN MATLAB DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO EXTENDIDO PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO**

Dr. Agustín Sáenz López

Maestro-Investigador de la Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura de la Universidad Juárez del Estado de Durango, Coordinador de Investigación de la misma Facultad. Área de investigación, Aplicaciones del Método de Elemento Finito Extendido.

Correo electrónico: [1agusgplmx@yahoo.com.mx](mailto:1agusgplmx@yahoo.com.mx),

Resumen: En este trabajo se presenta una implementación en MATLAB para obtener el Factor de Intensidad de Esfuerzo (FIS), utilizando el método de la Integral de Interacción, se usa el Método de Elementos Finitos Extendidos (MEFX) para el desarrollo del sistema, este método tiene la particularidad de modelar los sólidos aun cuando los dominios no sean continuos, como es el caso de un sólido con una fractura. Se usan las condiciones de frontera de Dirichlet, para simular las condiciones de frontera de la solución analítica, realizando todo el desarrollo en 2 dimensiones. Encontrándose una buena relación, entre los resultados de este sistema y los resultados del ejemplo muestra, cuya solución es bien conocida, para así probar la implementación. La diferencia entre los resultados por el método analítico y el método aproximado es del orden de 0.01 para el peor caso y 0.00002 para el mejor caso.

Abstract: This paper presents an implementation in MATLAB to obtain the Stress Intensity Factor (SIF), using the Integral of interaction, using the extended finite element method (XFEM) for the development of the system, this method has the



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

particularity of the solid modeling even when the domains are not continuous. Using the boundary conditions of Dirichlet, to simulate the boundary conditions of the analytical solution, doing all the development in 2 dimensions. Being a good relationship between the results of this system and the results of the example, whose solution is well known, to test the implementation. The difference between the results of the analytical method, and the approximate method is of the order of 0.01 for the worst case and 0.00002 for the best case.

Keywords: Elemento Finito Extendido, Factor de Intensidad de Esfuerzo, Matlab.

### 1.- INTRODUCCIÓN.

En este artículo, se describe la implementación de un sistema en MATLAB para obtener el Factor de Intensidad de Esfuerzo (FIE) utilizando la Integral de Interacción y el Método de Elemento Finito Extendido (MEFX). La Integral de Interacción ha sobresalido como una técnica útil y viable, para extraer el FIE del modo mixto en los problemas de mecánica de fractura. Por ejemplo, el método ha sido usado para determinar el FIE de modo mixto a lo largo de fracturas en tres dimensiones en materiales homogéneos y también en fracturas de interfase bimaterial 3-D considerando fracturas rectas y curvas[1,2,3].

Una de las principales ventajas del MEFX, es que se puede modelar el crecimiento de fracturas sin necesidad de un remallado, y permite a las fracturas pasar arbitrariamente por medio de los elementos finitos, al incorporar funciones de enriquecimiento que simulan los campos discontinuos, la malla es completamente independiente de la ubicación y de la geometría de la fractura. Por lo que ésta puede simular los problemas de discontinuidad. El MEFX ha sido exitosamente aplicado a crecimiento de problemas de fracturas estáticas y cuasi-estáticas en 2 dimensiones [4,5]. La aplicación de esta técnica para problemas de fractura en 3 dimensiones fue presentada en Sukumar [6].



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

### 2.- MATERIALES Y METODOS.

El MEFX es un modelo numérico diseñado para sólidos con discontinuidades especialmente fracturas, creado por Belytschko en 1999 [7], que utilizó una aproximación por elementos finitos estándar en dos dimensiones, que fueron enriquecidos con la función Heaviside en los elementos que estuvieran cortados por la fractura y con las funciones asintóticas que enriquecían el elemento finito, que contenía la punta de la fractura. Estos dos tipos de enriquecimiento simulan el salto en el desplazamiento que existe en los elementos cortados por la fractura y la singularidad que existe en la punta de la fractura. El método se basa en el concepto de partición de la unidad. En el Método de los Elementos Finitos Extendidos, la aproximación del desplazamiento esta descrita por la siguiente ecuación:

$$u(x) = \sum_{i \in N} N_i(x)u_i + \sum_{i \in N^{dis}} N_j H(x)a_j + \sum_{i \in N^{asy}} N_k \sum_{\alpha=1}^4 \phi_{\alpha}(x)b_k^{\alpha} \quad (1)$$

donde:  $i$  es el conjunto de todos los nodos en la malla.  $j$  es el conjunto de nodos cuyos soportes está completamente cortado por la fractura, este conjunto está indicado por un circulo en la Figura 1. El conjunto  $k$  son todos los nodos cuyo soporte contiene la punta de la fractura, este conjunto es mostrado en la Figura 1 por medio de rectángulos. Los grados de libertad nodales correspondientes a los desplazamientos son  $u_i, a_j, b_k^{\alpha}$ , mientras que las funciones forma respectivas son  $N_i, N_j, N_k$ .



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

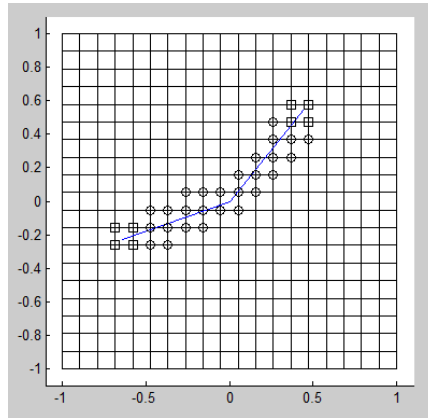


Figura 1.- Enriquecimiento Heaviside en los nodos de los elementos cortados por la fractura (círculos) y enriquecimiento asintótico en los nodos del elemento conteniendo la punta de la fractura (rectángulos)

$H(x)$  es la función Heaviside generalizada que toma los valores de +1 si  $x$  esta por arriba de la fractura y -1 por debajo.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{por arriba de la fractura} \\ -1 & \text{por abajo de la fractura} \end{cases} \quad (2)$$

$\phi_\alpha(x)$  es el campo de la punta de la fractura asintótico.

$$b_k^\alpha = \left( \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (3)$$

Donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares nodales en la punta de la fractura.

**La integral de interacción y el factor de intensidad de esfuerzo.**



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

El Factor de Intensidad de Esfuerzo, es un parámetro muy importante en la mecánica de fractura, ya que conociéndolo, es posible obtener los esfuerzos y los desplazamientos en cualquier punto del dominio. La Integral de Interacción es obtenida de la integral J considerando dos soluciones para los desplazamientos (y por lo tanto para las deformaciones), uno al que se llamara actual y estará representado por (1) y la otra solución que será el estado auxiliar y que estará representada por (2). Para evaluar el FIE, debemos seleccionar los desplazamientos auxiliares, las deformaciones auxiliares y los esfuerzos auxiliares alrededor a la punta de la fractura.

Donde  $M^{(1,2)}$  es llamado la integral de interacción para los estados 1 y 2

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma \quad (4)$$

### La Integral de Interacción para cálculos numéricos.

Para poder usar la integral de interacción anterior en los cálculos numéricos es conveniente transformarla de una integral de línea y contorno a una integral de área de dominio. Para esto se introduce una función peso  $q$  de manera que tiene un valor igual a la unidad en el contorno  $\Gamma$  y cero en el contorno exterior  $\Gamma_0$  (Figura 2). Dentro del área encerrada por la trayectoria  $\Gamma, \Gamma_0, C^+$  y  $C^-$ , la función peso  $q$  es una función suave arbitraria tomando valores entre cero y la unidad. La integral de interacción para el camino cerrado  $C = \Gamma \cup C^+ \cup \Gamma_0 \cup C^-$  se puede escribir como

$$M^{(1,2)} = \int_C \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right] q m_j d\Gamma \quad (5)$$

“CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

dónde  $m_j$  son los componentes del vector normal unitario sobre la curva cerrada  $C$  con dirección hacia afuera del área  $A_\Gamma$ . Hay que mencionar que  $m_j = -n_j$  en el contorno  $\Gamma$  y  $m_j = n_j$  en  $\Gamma_0, C^+, C^-$ . Se supone que las caras de la fractura están libres de tracción. Ahora usando el teorema de la divergencia y llevando el límite a la punta de la fractura se tiene

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[ -W^{(1,2)} \delta_{1j} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6)$$

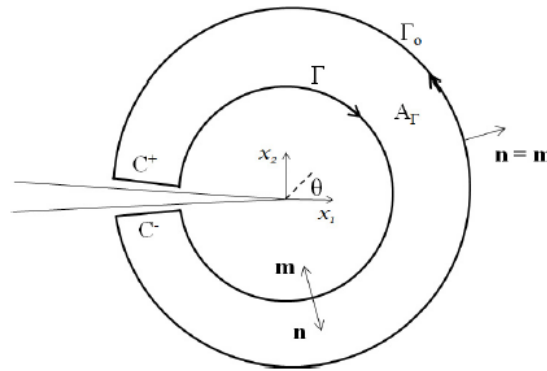


Figura 2.- Convenciones para el dominio J: dominio A es cerrado por  $\Gamma, C^+, C^-$  y  $\Gamma_0$ ; la normal unitaria  $m_j = n_j$  sobre  $\Gamma_0$  y  $m_j = -n_j$  sobre  $\Gamma$  [9]

Para el cálculo numérico de la integral, el dominio  $A$  es el conjunto de los elementos finitos que contienen la punta de la fractura. Para esto seleccionamos todos los elementos finitos en los cuales tenemos nodos dentro de una bola de radio  $r_d$  centrada en la punta de la fractura. Debido a que la integral J es independiente del camino, se puede seleccionar un  $r_d$  suficientemente grande.



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

Dentro del dominio de integración el valor de  $\partial q / \partial x_j$  es igual a cero por lo tanto la integral es evaluada solamente en los elementos finitos de la frontera donde  $\partial q / \partial x_j \neq 0$ . Por lo tanto el uso de la forma de dominio de la integral de interacción, es la manera más aconsejable para evaluar la integral de contorno en el marco de los Elementos Finitos. Para más detalles sobre el cálculo de la forma del dominio de la integral de interacción puede ser encontrado en [8].

### 3.- DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.

Para la implementación del MEFX se utilizó MATLAB debido a la facilidad que presenta este paquete para un desarrollo rápido del sistema, así como el manejo de matrices, que es una de sus propiedades principales que lo caracterizan, aunque presenta la desventaja de ser más lento en su ejecución cuando tenemos un gran número de elementos finitos, comparado con otros lenguajes como C, C++, y Fortran.

El diagrama de flujo para la implementación del software se muestra en la Figura 3.





## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

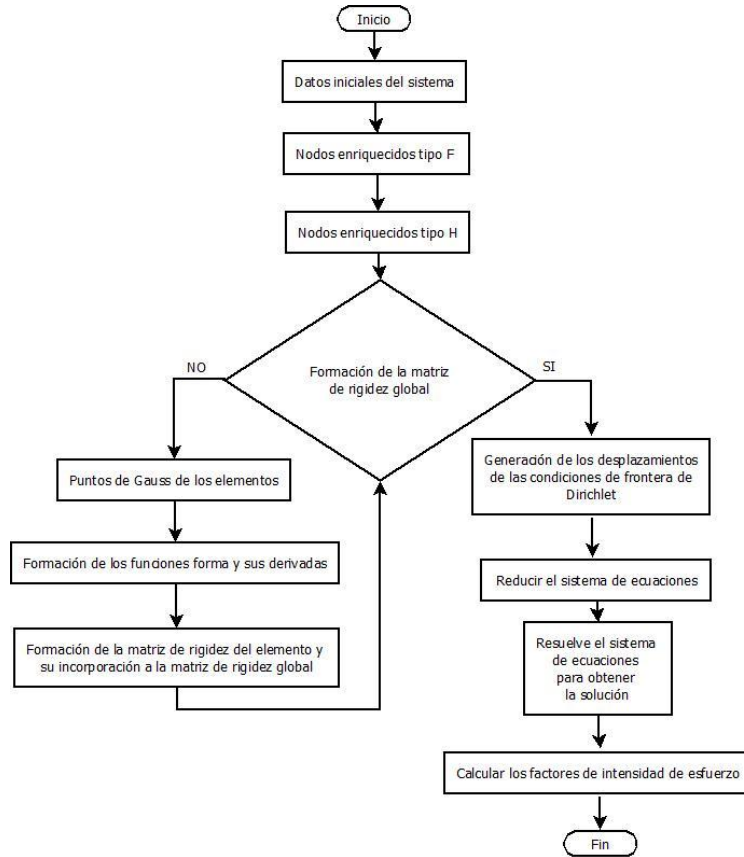


Figura 3.- Diagrama de flujo del software

Una descripción de los contenidos de cada uno de los pasos que componen el diagrama de flujo es la siguiente:

### Generación de datos de la malla, nodos y fractura.

En esta parte del programa, se discretiza el dominio en elementos finitos según las condiciones iniciales que se hayan dado y las consideraciones del problema que se desea resolver.

### Nodos enriquecidos tipo F.





## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

Para la determinación de los nodos que tendrán un enriquecimiento F, se verifica que el nodo se encuentre dentro del radio de enriquecimiento, teniendo como centro la punta de la fractura.

### **Nodos enriquecidos tipo H.**

El algoritmo para determinar los nodos enriquecidos tipo H, verifica que la fractura cruce el elemento finito de los nodos seleccionados, para esto, con anterioridad se marca con un signo los nodos que se encuentra por arriba de la fractura y con el signo contrario los nodos que están por debajo de la fractura. La lista formada con los nodos tipo H, se compara con la lista de los nodos tipo F, y se eliminan de la primera los nodos

### **Formación de la matriz de rigidez global.**

Para el ensamblaje de las matrices de los elementos en la matriz de rigidez global se llevara a cabo recorriendo todos los elementos finitos y calculando las tres rutinas siguientes en cada elemento que se esté trabajando, de esta manera se irá formando la matriz de rigidez global poco a poco o elemento finito por elemento finito. Para cada elementos finito se ejecutan tres rutinas, En la primera se determina los puntos de Gauss que irán en cada elemento, en la siguiente se generan las funciones forma de los elementos finitos tradicionales , de los elementos finitos que tienen enriquecimiento tipo H, y los elementos finitos que tienen enriquecimiento tipo F. En la tercera rutina se genera la matriz de rigidez del elemento finito que se está trabajando para después agregarla a la matriz de rigidez global.

### **Formación de la matriz de rigidez del elemento y su incorporación a la matriz de rigidez global.**



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

En esta rutina se crean primero las matrices de rigidez de los elementos que son cuatro, las cuales se inicializan como una matriz vacía de 24x24. Haciendo la suposición de que todos los elementos finitos tendrán los grados de libertad estándar, los grados de libertad Heaviside, y los grados de libertad de la punta de la fractura. Estas cuatro matrices son la representación de las siguientes matrices

$$M_{11} = \frac{dN'}{dx} \left( C_{11} \frac{dN'}{dx} \right) + \frac{dN'}{dy} \left( C_{33} \frac{dN'}{dy} \right) \quad M_{12} = \frac{dN'}{dx} \left( C_{12} \frac{dN'}{dy} \right) + \frac{dN'}{dy} \left( C_{33} \frac{dN'}{dx} \right)$$

$$M_{21} = \frac{dN'}{dy} \left( C_{33} \frac{dN'}{dy} \right) + \frac{dN'}{dx} \left( C_{33} \frac{dN'}{dy} \right) \quad M_{22} = \frac{dN'}{dy} \left( C_{22} \frac{dN'}{dy} \right) + \frac{dN'}{dx} \left( C_{33} \frac{dN'}{dx} \right)$$

Donde cada una de estos términos es una matriz de 24x24 (4 matrices). Para agregar esta matriz a la matriz global, consideramos a todos los nodos con 24 grados de libertad, sin embargo los que no tengan enriquecimiento tipo H o tipo F, tendrán valor cero los elementos (coeficientes) que correspondan a esos valores. Para el vector de carga se lleva a cabo el mismo procedimiento

### Generación de los desplazamientos de las condiciones de frontera de Dirichlet.

Para generar los desplazamientos de las condiciones de frontera de Dirichlet, se usará el valor del factor de intensidad de esfuerzo que se dió en los datos iniciales, la distancia y el ángulo de cada nodo que se obtuvo en la sección de Generación de Datos de la malla, nodos y fractura. Estos datos se aplicaran a las siguientes ecuaciones para los nodos que se encuentran en la frontera solamente.

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

### Solución del sistema de ecuaciones.



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

Para resolver el sistema de ecuaciones usamos la siguiente línea de código,  $Sol(Pos) = MatRigGlo \setminus VecCar$ . Donde  $MatRigGlo$  corresponde a la matriz de rigidez global y  $VecCar$  corresponde al vector de carga, la solución o los desplazamientos se obtienen del vector  $Sol(Pos)$ .

### Cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo.

Para calcular los factores de intensidad de esfuerzo, se realiza los siguientes procesos.

- 1.- Determinamos cuales son los elementos finitos que se encuentran en la frontera determinada por el radio que se dió en las condiciones iniciales y que serán los elementos que se usarán para obtener el factor de intensidad de esfuerzo.
- 2.- Para calcular la función de suavidad  $dq/dx_i$  de la ecuación 16, se determina cuales son los nodos de los elementos finitos seleccionados que están dentro del radio de integración de la ecuación 16, pasamos las derivadas  $dq/dx$  y  $dq/dy$  en forma de Puntos de Gauss para poder llevar a cabo la integral.
- 3.- La integral de la ecuación 16 se lleva a cabo por medio de la integración numérica utilizando los puntos de Gauss de los elementos finitos seleccionados.

### Ejemplos numéricos.

El ejemplo que se usó para la verificación del programa, es una placa homogénea que está bajo condición de deformación plana elástica en dos dimensiones, contiene una fractura tipo arista. La fractura parte del centro de la placa hasta alcanzar su extremo izquierdo, las dimensiones de la placa son 1 unidad por lado, con un modulo de Young igual a 10,000, y una constante de poisson 0.3, se consideró condiciones de frontera de Dirichlet, donde se supone un valor para el Factor de Intensidad de Esfuerzo de 1 y se calculan los desplazamientos que



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

genera este FIE en la frontera de la placa, que se usaran como condiciones de frontera para el modelo construido, durante la experimentación se estuvo variando la cantidad de elementos finitos de la malla y el radio de la integral de dominio. La ecuación que se usó para el cálculo del error es la siguiente:

$$Error = \frac{FIE - FIE^{referencia}}{FIE^{referencia}}$$

De los resultados, se observa una disminución del error conforme se incrementa el radio de enriquecimiento de la punta de la fractura, el error más pequeño es 0.00056834 (con una malla 7921 y con un radio de integración de 5) mientras que para un radio de enriquecimiento de la punta de fractura 0.5 se tiene que el error más pequeño es 0.00002388 (malla de 7921 elementos y radio de integración de 0.4). La disminución del error es paulatina conforme se incrementa el número de elementos de la malla y se incrementa el radio de enriquecimiento de la punta de la fractura. También se observa una disminución del error cuando la malla alcanza los 1521 o bien alcanza los 2401 elementos.

#### 4.- CONCLUSIONES.

En este artículo se desarrolla la implementación del software para calcular el Factor de Intensidad de Esfuerzo (FIE) por medio de la Integral de Interacción acoplada con el Método de los Elementos Finitos Extendidos, utilizando este software para resolver un problema de fractura en una placa cuya solución es bien conocida, y se obtuvieron las siguientes conclusiones.

La comparación entre la solución exacta del problema ejemplo y los resultados arrojados por el software desarrollado, muestran una gran concordancia, ya que la diferencia entre ellos es menor del 0.01, por lo que este desarrollo se puede



## “CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

utilizar para el estudio de la aplicación del método de elementos finitos extendidos a fracturas. Con respecto al cálculo del FIE se encontró que disminuye conforme se incrementa el número de elementos de la malla y se incrementan los puntos de integración de Gauss. Para éste problema se tiene un error de 0.00002388 cuando se toma un FIE de referencia de 1. Existe una disminución en el error del orden de 10 cuando se alcanza la malla de 1521 o 2401 elementos, no importando los puntos de integración. Con estos resultados se observa que este software que utiliza la Integral de Interacción acoplada con el Método de los Elementos Finitos Extendidos es un proceso confiable para obtener el Factor de Intensidad de Esfuerzo.

### 5.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

1.- G. Eason, B. Noble, and I. N. Sneddon, “On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions,” *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. A247, pp. 529–551, April 1955.

2.- Matthew C. Walters. “Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 1635-1663, April 2005.

3.- Yi-Heng Chen. “M-integral analysis for two-dimensional solids with strongly interacting microcracks Part I: in an infinite brittle solid,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 3193-3212, Sept 2001.

4.- Yi-Heng Chen. “M-integral analysis for two-dimensional solids with strongly interacting microcracks. Part II: in the brittle phase of an infinite metal/ceramic biomaterial,” *International Journal of Solids and Structures*, vol.38, pp. 3213-3232, Sept 2001.

5.- Sukumar, Moes, Belytschko. “Extended finite element method for three-dimensional crack modeling,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, pp. 1549-1570, Nov 2000.

6.- Moes, Dolbow, Belytschko. “A finite element method for crack growth without remeshing,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131- 150, Jan 1999.



“CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN 2014”

Multidisciplinario

10 y 11 de abril de 2014, Cortazar, Guanajuato, México

ISBN: 978-607-95635

7.- Belytschko, T. and T. Black [1999]. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering 45, 601–620.

8.- Shih, C. and R. Asaro [June 1988]. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: parti-small scale yielding. Journal of Applied Mechanics 55, 299–316.

9.- Awais Ahmed [2009]. eXtended Finite Element Method(XFEM)-Modeling arbitrary discontinuities and Failure analysis, these, Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia.